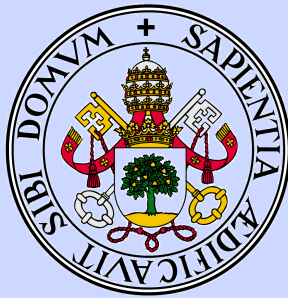


Memoria para la obtención del grado de doctor

Singularidades de Hipersuperficies Casi-Ordinarias

Fernando Hernando Carrillo
Tesis doctoral, Junio 2007

Dirigida por:
Prof. Dr. Félix Delgado De la Mata



Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Valladolid

Memoria para la obtención del grado de doctor

Singularidades de Hipersuperficies Casi-Ordinarias

Fernando Hernando Carrillo
Tesis doctoral, Junio 2007

Dirigida por:
Prof. Dr. Félix Delgado De la Mata

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Valladolid

FÉLIX DELGADO DE LA MATA, CATEDRÁTICO DE UNIVERSIDAD DEL DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA, GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA DE LA UNIVERSIDAD DE VALLADOLID

CERTIFICA:

Que la presente memoria titulada *Singularidades de Hipersuperficies Casi-Ordinarias* ha sido realizada bajo mi dirección en el Departamento de Álgebra, Geometría y Topología de la Universidad de Valladolid por Fernando Hernando Carrillo para optar al grado de Doctor en Matemáticas, y para que así conste en cumplimiento de la presente legislación, autoriza su presentación ante el departamento de Álgebra, Geometría y Topología de dicha Universidad.

En Valladolid a 7 de Junio de 2007

Fdo: Félix Delgado de la Mata

*A mi Familia,
y a Eva.*

GRACIAS!!!

Durante estos años de estudiante de doctorado he aprendido muchas matemáticas, he pasado muchos momentos buenos y también alguno malo. Quiero agradecer a todas las personas que me han enseñado, ayudado, apoyado y en definitiva han hecho posible que este proyecto llegara a buen puerto.

En primer lugar, agradecer a Antonio Campillo la confianza al darme la oportunidad de comenzar la tesis, además de todas las ideas que ha aportado en todo este tiempo.

También quiero agradecer a mi director Félix Delgado de la Mata el trato que ha tenido conmigo, creo sinceramente que ha sido ejemplar. Me ha enseñado gran parte de las matemáticas que ahora sé, he disfrutado mucho hablando con él de matemáticas y de otros temas igualmente interesantes. Además me he sentido apoyado en todo momento.

Otra persona con la que he aprendido mucho y que me ha ayudado ha sido Pedro Daniel González Pérez. Trabajar con él ha sido fundamental para la obtención de los resultados de este trabajo. Por eso y por el buen recibimiento que he tenido siempre en mis visitas a la Universidad Complutense de Madrid quiero darle las gracias.

Quiero dar las gracias a Jorge Olivares por el caluroso recibimiento que me dio en mi breve pero intensa estancia en Mexico. Así como por las sesiones de trabajo que teníamos. Por supuesto esta historia necesito de Paco para poderse concluir, que rápidamente se intereso por nuestro trabajo.

Creo que han sido muy importantes los compañeros del departamento que me han apoyado, con los que he compartido muchos momentos de café, discusiones y cenas inolvidables. Creo que Dani, Ana, Manolo, Félix y demás compañeros pueden confirmarlo. Pero en particular quiero dar las gracias a mis compañeros de viajes Julio y Diego por ser buenos compañeros y amigos.

Quiero agradecer a mis amigos de Burgos por su apoyo incondicional ya que siempre han estado ahí. Asimismo, quiero agradecer a mis amigos de Valladolid, Bull, Joso, Lolo ..., que además han sido mis compañero de licenciatura y de fiestas, por acompañarme en tantos momento buenos y no tan buenos. Y por las visitas una semana si otra también de Oli y Silvia que han hecho mas ameno todo este tiempo.

Pero las personas a las les debo gran parte de lo que ahora soy, por su apoyo, paciencia y comprensión son mi familia y sobre todo Eva, ella es quien me ha soportado cada día y quien con infinita paciencia ha estado siempre a mi lado todo este tiempo. Creo que no tendré suficiente tiempo para agradecerse.

Nada de esto hubiera sido posible sin la financiación económica, bien a través de las becas del Ministerio de Educación y Ciencia y de la Universidad de Valladolid, o bien a través de los proyectos nacionales, de la Junta de Castilla y León y de la Generalitat Valenciana.

A todos ellos, muchas gracias.

Índice general

| | |
|----------------------------------------------------------------------|------------|
| Introducción | 11 |
| Introducción | 11 |
| Introduction | 19 |
| Introduction | 19 |
| Summarize of Chapter 2 | 26 |
| The Irreducible Case | 26 |
| Reducible case | 32 |
| The Generators of the Semigroup | 39 |
| Summarize of Chapter 3 | 53 |
| 1. Singularidades Casi-Ordinarias | 55 |
| 1.1. Descripción y Datos Característicos | 55 |
| 1.2. Cálculo de las raíces. Algoritmo de Newton | 61 |
| 2. El semigrupo | 67 |
| 2.1. Caso Irreducible | 67 |
| 2.2. Caso Reducible | 77 |
| 2.3. Generadores del Semigrupo | 90 |
| 3. La Serie de Poincaré | 111 |
| 3.1. Repaso de Geometría Tórica | 114 |
| 3.2. La Serie de Poincaré asociada a una Multifiltración | 115 |
| La Serie de Poincaré de una Superficie | 123 |
| 3.3. El Anillo Graduado | 124 |
| 3.4. Divisores Esenciales | 129 |
| 3.5. La Serie de Poincaré y el Semigrupo | 135 |
| 3.6. La Serie de Poincaré y la Función Zeta | 141 |
| 3.7. Ejemplo | 143 |
| 3.8. Integración con respecto a la Característica de Euler | 144 |

Introducción

Nuestro trabajo está enmarcado dentro de la clasificación topológica de hipersuperficies casi-ordinarias singulares. Sea $(S, 0) \subset (\mathbb{C}^{d+1}, 0)$ un germen de dimensión d , se dice que es casi-ordinario si existe un morfismo finito $(S, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ que es no ramificado fuera de los hiperplanos coordenados. A dicho morfismo se le llama proyección casi-ordinaria. La familia de ejemplos más conocidos es la dada por las curvas planas singulares.

Dados $(S_1, 0)$ y $(S_2, 0)$ dos gérmenes de hipersuperficie casi-ordinarias singulares, decimos que son topológicamente equivalentes, si existen entornos abiertos U y V del origen, un homeomorfismo $\Psi : U \rightarrow V$ y representantes S_i de $(S_i, 0)$, $i=1,2$ tal que:

$$\Psi(S_1 \cap U) = S_2 \cap V.$$

Hoy en día, el problema de clasificación se puede considerar que está bien entendido en los casos de curvas planas e hipersuperficies casi-ordinarias irreducibles. Para resolverlo se utilizan, dependiendo de la aplicación concreta que se persiga, algunos de los invariantes clásicos ligados a la singularidad.

En el caso de curvas planas, habría que citar entre dichos invariantes los pares de Puiseux, la sucesión de multiplicidades, los exponentes característicos, el semigrupo, el grafo dual o la serie de Poincaré. Todos ellos son equivalentes entre sí y equivalentes a su vez al tipo topológico de la singularidad. Se pueden encontrar a lo largo de la literatura numerosos artículos donde se usan estos invariantes, desde los trabajos pioneros de Zariski [97] hasta los más recientes de Campillo-Delgado-Gusein [18]-[27], Theo de Jong-Pfister [37], Greuel-Lossen-Shustin [58] y pasando por las importantes aportaciones de Abhyankar [2], Teissier [96], Eisenbud-Neumann [41] y Brieskorn [10] por citar solo algunos.

En el caso de gérmenes de hipersuperficies casi-ordinarias irreducibles la

bibliografía es mucho más escasa. Las superficies casi-ordinarias aparecen por primera vez en el trabajo de Jung [67], en el proceso natural de desingularización puesto que son las que tienen el discriminante más simple. También Zariski en [98] trata las singularidades casi-ordinarias dentro del contexto de resolución de singularidades. Aunque es Lipman en su tesis [73] quién hace un estudio más profundo. Introduce el concepto de rama casi-ordinaria normalizada y demuestra que todo polinomio casi-ordinario irreducible admite una parametrización que posee una rama normalizada.

Más tarde, Lipman prueba que en el caso de superficies casi-ordinarias irreducibles los exponentes característicos de una rama casi-ordinaria normalizada son un invariante analítico de la singularidad (ver [75]). El mismo resultado es probado por Luengo en [77] de forma independiente. Posteriormente, Gau en [46] prueba que en el caso de superficies el tipo topológico de una singularidad casi-ordinaria determina y queda determinada por los exponentes característicos de una rama normalizada. Poco después, Gau y Lipman generalizan este resultado para dimensión arbitraria (ver [76] y [47]).

El siguiente invariante que se trata en la literatura en el semigrupo asociado a una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible. Este fue introducido por Kiyek y Micus en [69], asimismo prueban en el caso de superficies que este es un invariante analítico de la singularidad. El siguiente paso significativo lo dan Popescu-Pampu y González Pérez en sus respectivas tesis [85] y [48] volviendo a introducir el semigrupo. Ambos dan definiciones diferentes. Por una parte, Popescu-Pampu considera aquellas funciones h que al evaluarlas dan monomio principal, evaluar significa sustituir una raíz de f en h . Define el semigrupo como el conjunto de exponentes de los correspondientes monomios principales tras evaluar. Por otra parte, González Pérez evalúa en todas las funciones y define como semigrupo el conjunto de exponentes que están en la frontera del poliedro de Newton después de evaluar. Sorprendentemente ambos semigrupos coinciden. Ambos prueban por técnicas diferentes la invariancia analítica del semigrupo en cualquier dimensión (ver [88], [52] y [49]).

Los últimos objetos que queremos considerar (principalmente en el caso irreducible) son la Función Zeta y la serie de Poincaré. La Función Zeta fue calculada por McEwan y Némethi para el caso irreducible en [79] y por los mismos autores junto con González Pérez para el caso reducible [51], además proponen como problema calcular la serie de Poincaré y compararla con la Función Zeta [78], este es uno de los problemas objeto de estudio en esta memoria.

En el caso reducible los trabajos son mucho más recientes y quedan en la

literatura bastantes cosas por hacer incluso por definir. En todos los trabajos encontrados todo depende de la parametrización casi-ordinaria dada. A partir de ella parece claro que los datos relevantes son los exponentes característicos de cada componente irreducible junto con los ordenes de contacto entre pares de componentes. Estos datos tienen una estructura parcialmente ordenada que se representa de manera muy clara mediante el árbol de Eggers-Wall, dicho árbol es objeto de estudio de Popescu-Pampu en su tesis [85] generalizando el ya existente para curvas planas.

González Pérez en [53] da dos nuevos algoritmos de resolución de singularidades casi-ordinarias, ambos necesitan de la resolución tórica de variedades tóricas afines no necesariamente normales, lo cual es posible gracias al trabajo con B. Teissier [55].

Por último destacar de la bibliografía el trabajo de García Barroso y González Pérez en [45], ya que de cara a nuestros intereses (estudio del semigrupo) es el más completo en el estudio de singularidades casi-ordinarias reducibles. En él estudian la polar de una singularidad de hipersuperficie casi-ordinaria y dan una descomposición de la polar en paquetes de ramas que caracterizan el tipo topológico de cada componente irreducible de la singularidad. Para el cálculo explícito de los valores del semigrupo (en el Capítulo 2) es básica la fórmula, que ellos dan en la Proposición 5 en [45], acerca de la intersección de una componente irreducible de la singularidad con un germen estrictamente comparable con la misma.

Nuestro propósito en este trabajo es el estudio del semigrupo de valores en el caso de hipersuperficies casi-ordinarias reducibles y el cálculo de la serie de Poincaré en el caso irreducible.

En el Capítulo 1 fijamos la notación y los conceptos que vamos a usar a lo largo de todo el trabajo, es decir, qué entendemos por singularidad casi-ordinaria, exponentes característicos, orden de coincidencia o que es una rama casi-ordinaria normalizada. Además, en este capítulo reproducimos el algoritmo de Newton generalizado que Kiyek y Vicente-Cordoba describen en [70], para obtener una parametrización de una hipersuperficie casi-ordinaria. Más allá de la importancia que tiene en si mismo el propio algoritmo, para nosotros juega un papel fundamental ya que nos permite calcular explícitamente los exponentes característicos a partir de la ecuación implícita de la singularidad.

En el Capítulo 2 comenzamos repasando los resultados ya conocidos sobre el semigrupo en el caso irreducible. En el caso reducible consideramos tres conjuntos de funciones en las que evaluar: las comparables, las racionalmente comparables y las estrictamente comparables (ver definiciones (2.6) y (2.7))

y por lo tanto tres semigrupos dependiendo de en que conjunto de funciones evaluemos. Consideramos un semigrupo más, la generalización natural del dado por González Pérez en el caso irreducible. Vemos las relaciones entre dichos semigrupos. Finalmente, fijamos como definición la siguiente

$$S(f) = \{\underline{\gamma} \in \mathbb{Q}_{n_1}^d \times \cdots \times \mathbb{Q}_{n_r}^d \mid \exists h \in R \text{ tal que } \underline{v}(h) = \underline{\gamma}\}.$$

Una vez fijada la definición analizamos que propiedades son fácilmente generalizables del caso de curvas planas. Observamos que el semigrupo proyección sobre la componente i -ésima coincide con el semigrupo de f_i , es decir, $pr_i(S(f)) = S(f_i)$. Por otra parte vemos que a partir del semigrupo se pueden obtener los ordenes de contacto (ver Definición 2.1.4) entre pares de componentes irreducibles, lo que implica que se puede deducir el árbol de Eggers-Wall a partir del semigrupo. Nuestro objetivo es dar un sistema de generadores, para ello nuestra estrategia es considerar ciertas truncaciones genéricas de las raíces de f .

Con el fin de obtener dichas truncaciones proponemos un método que resumimos a continuación. En primer lugar si f es irreducible y h es racionalmente comparable con f entonces el orden de contacto $k(h, f)$ solo puede estar en una región acotada $C_i = \{\lambda \in \mathbb{Q}^d \mid \lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_{i+1}\}$ (donde por $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ denotamos a los exponentes característicos). Consideramos los retículos $M_i := \mathbb{Z}^d + \langle \lambda_1, \dots, \lambda_i \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, $L_i := \mathbb{Z}(M_i, 1) \subseteq \mathbb{Q}^{d+1}$ y el politopo P_i en \mathbb{R}^{d+1} dado por la envolvente convexa de los puntos $\{Q_j := (\alpha_j, n_j)\}_{j=1}^{2^d}$, donde $\{q_j = \alpha_j/n_j\}_{j=1}^{2^d}$ son los 2^d vértices de C_i , con n_j los grados de las curvetas h_{q_j} por q_j (ver Definición 2.3.2). El politopo P_i tiene sus vértices en L_i , que a su vez generan al semigrupo $S = \langle Q_1, \dots, Q_{2^d} \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ cuyo cierre entero en L_i lo denotamos por \overline{S}_{L_i} . Ambos semigrupos, S y \overline{S}_{L_i} están finitamente generados. Además, se puede ver que los elementos que buscamos son aquellos que no descomponen en \overline{S}_{L_i} . Sin embargo el calculo explícito de un sistema de generadores de \overline{S}_{L_i} es muy difícil, por lo que proponemos un algoritmo que calcula un sistema de generadores (no necesariamente minimal).

Con el fin de calcular un sistema de generadores en el caso reducible suponemos, en primer lugar, que tenemos dos componente irreducibles f_1, f_2 . Entonces, consideramos la región C_i que contiene al orden de coincidencia $k(f_1, f_2)$ y que subdivide a esta región en dos partes: $C_{i,1} = \{q \in \mathbb{Q}^d \mid \lambda_i < q \leq k(f_1, f_2)\}$ y $C_{i,2} = \{q \in \mathbb{Q}^d \mid k(f_1, f_2) < q \leq \lambda_{i+1}\}$. Repitiendo para $C_{i,1}$ y $C_{i,2}$ el proceso descrito en el párrafo anterior obtenemos un conjunto finito de elementos del semigrupo asociados a las correspondientes regiones. En general cuando tenemos varias componentes irreducibles $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$, consideramos el conjunto $\theta(f) = \{\lambda_j^i\}_{j=1, \dots, g_i} \cup \{k(f_i, f_j)\}_{i=1, \dots, r}$ que es parcialmente

ordenado y tiene estructura de árbol, el árbol de Eggers-Wall. Para cada par de elementos consecutivos α, β de $\theta(f)$ consideramos el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{Q}^d \mid \alpha \leq \lambda \leq \beta\}$. Este juega el mismo papel que antes jugaba C_i , luego procedemos como antes obteniendo un conjunto finito de elementos para cada región. Además, para cada componente f_i , existe una región no acotada $\{q \in \mathbb{Q}^d \mid q \geq \lambda_{g_i}\}$, donde λ_{g_i} es el último exponente característico de la componente f_i , que nos proporciona un conjunto infinito de generadores y que sabemos como describir. Finalmente, la unión de todos los conjuntos obtenidos es un sistema de generadores.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de la serie de Poincaré y su comparación con la Función Zeta tal y como se propone en [78].

Además del evidente interés que implica siempre responder a un problema planteado, la serie de Poincaré tiene un interés en si misma. A partir de trabajos recientes de Campillo, Delgado y Gusein-Zade se ha puesto de manifiesto que, la existencia de series de Poincaré convenientes a la situación geométrica juega un papel unificador entre algunos de los invariantes más complejos, en particular ofrece una conexión algebraica entre invariantes de naturaleza puramente topológica (como el polinomio de Alexander) y otros de tipo combinatorio (el grafo dual) o algebraico (el semigrupo de valores). Por otro lado, las series de Poincaré son fácilmente generalizables a otras situaciones geométricas considerablemente menos conocidas que las curvas singulares como por ejemplo valoraciones divisoriales (ver [44] y [35]), superficies racionales (ver [25]), variedades tóricas (ver [72]) o las hipersuperficies casi-ordinarias en nuestro caso.

Esta es una de las razones que motivan el papel central que juegan las series de Poincaré y su cálculo en esta memoria para el caso de hipersuperficies casi-ordinarias irreducibles.

La primera observación importante es que la normalización de toda hipersuperficie casi-ordinaria es la variedad tórica $(\bar{S}, 0) = (Z_{\rho, N_g}, o_{\rho})$, con N_g el dual de M_g , siendo este último el retículo generado por \mathbb{Z}^d junto con los generadores del semigrupo y $\rho = \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$. Este hecho es fundamental, por ejemplo esta estructura tórica es lo que permite describir los divisores esenciales tanto en el origen (ver [8] y [63]) como en el lugar singular (ver [66], [64] y [54]). También es determinante el uso de la estructura tórica en el cálculo efectivo de la dimensión de los espacios vectoriales que definen las componentes homogéneas de los multi-graduados (resp. de las multi-filtraciones).

En la Sección 3.2 calculamos la serie de Poincaré de una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible asociada a las valoraciones esenciales centradas en el origen, siguiendo las ideas de Campillo, Delgado y Gusein-Zade. Formalmente

esta se define como

$$P_W(t_1, \dots, t_r) := \frac{(t_1 - 1) \cdots (t_r - 1)}{t_1 \cdots t_r - 1} \sum_{\underline{a} \in \mathbb{Z}^r} c(\underline{a}) \underline{t}^{\underline{a}},$$

donde $W = (w^1, \dots, w^r)$ son elementos minimales del conjunto $N_g \cap \overset{\circ}{\sigma}$, con respecto al orden $v \leq_{\sigma} v' \Leftrightarrow v' \in v + \sigma$ y que están asociadas a los divisores esenciales D^1, \dots, D^r , que como ya hemos dicho antes se conocen gracias a los trabajos recientes de Bouvier, Ishii, Kollar y González Pérez. Para todo $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ se define $J(\underline{a}) = \{h \in R \mid \nu_{w^1}(h) \geq a_1, \dots, \nu_{w^r}(h) \geq a_r\}$ y $c(\underline{a}) := \dim_{\mathbb{C}} J(\underline{a}) / J(\underline{a} + \underline{1})$, con $\nu_W = (\nu_{w^1}, \dots, \nu_{w^r})$ las valoraciones esenciales correspondientes a los divisores esenciales y $\underline{1} = (1, \dots, 1)$.

De cara al cálculo explícito de la serie de Poincaré definimos una función $\Phi_W : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^r$, que se define como $\Phi_W(\gamma) = (\langle w^1, \gamma \rangle, \dots, \langle w^r, \gamma \rangle)$, donde Γ es el semigrupo asociado a la singularidad. Como sabemos calcular $P_{\Gamma} := \sum_{\gamma \in \Gamma} u^{\gamma}$ el Teorema 3.2.7 cuyo enunciado es, $P_W(t_1, \dots, t_r) = \Phi_W(P_{\Gamma})$, nos muestra como calcular $P_W(t)$. El final de esta sección lo dedicamos a ver que en general no es suficiente la serie de Poincaré asociada a la multifiltración para recuperar el semigrupo. Esto es porque no hay suficientes valoraciones esenciales linealmente independientes centrados en el origen, por tanto proponemos incluir también los esenciales asociados al lugar singular, pero ahora surge la posibilidad de que las dimensiones $c(\underline{a})$ sean infinitas.

Para solucionar este problema, en la Sección 3.3, introducimos el anillo multi-graduado $gr_{\underline{\nu}}(\mathcal{O}_S) = \bigoplus_{\underline{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} J(a_1, \dots, a_r)$, donde $\underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_r)$ es el conjunto de valoraciones esenciales, suponiendo que al menos una de ellas está centrada en el origen lo que garantiza que $c_{\underline{a}} = \dim_{\mathbb{C}} J(\underline{a})$ sea finita. También se prueba que

$$gr_{\underline{\nu}}(\mathcal{O}_S) \cong \mathbb{C}[\Gamma]^{w_1, \dots, w_{k+1}} = \bigoplus_{a_1, \dots, a_{k+1} \geq 0} \left(\bigoplus_{\substack{\langle w_1, u \rangle = a_1 \\ \vdots \\ \langle w_{k+1}, u \rangle = a_{k+1}}} \mathbb{C} X^u \right)$$

donde Γ es el semigrupo de la singularidad y $w_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ es el vector que define la valoración esencial (que es monomial) ν_i , $i = 1, \dots, r$. Como consecuencia de esto tenemos que

$$c_{\underline{a}} = \{u \in \Gamma \mid \langle w_j, u \rangle = a_j, j = 1, \dots, r\}.$$

Esta fórmula de la dimensión nos permite calcular la serie de Poincaré de forma efectiva con la misma idea que indicábamos antes,

$$P_{\Gamma}^{\Phi_w} = P_{\underline{\nu}}(t) = \frac{1}{1 - t^{\langle \underline{w}, e_1 \rangle}} \cdots \frac{1}{1 - t^{\langle \underline{w}, e_d \rangle}} \cdot \frac{1 - t^{\langle \underline{w}, n_1 \gamma_1 \rangle}}{1 - t^{\langle \underline{w}, \gamma_1 \rangle}} \cdots \frac{1 - t^{\langle \underline{w}, n_g \gamma_g \rangle}}{1 - t^{\langle \underline{w}, \gamma_g \rangle}}. \quad (1)$$

En la Sección 3.4 estudiamos los divisores esenciales a través de los trabajos ya mencionados de Bouvier, Ishii, Kollar y González Pérez. Estos trabajos, junto con el Teorema 7.3 de Lipman en [76], nos permiten deducir ciertas propiedades de los divisores esenciales que ponemos como las filas de una matriz que denotamos por \mathcal{M}_f^w .

En la Sección 3.5 damos un algoritmo (la demostración del Teorema 3.5.4) que nos permite recuperar los exponentes característicos normalizados a partir de la serie de Poincaré. La idea general, exceptuando ciertos casos que son un poco más elaborados, es que sabemos leer de la serie de Poincaré tanto la matriz \mathcal{M}_f^w , como $\langle \underline{w}, \gamma_j \rangle, \forall j$, siendo γ_j los generadores de Γ . Luego todo el problema (salvo excepciones), se reduce a estudiar cuando el sistema lineal de ecuaciones

$$\mathcal{M}_f^w \gamma = \langle \underline{w}, \gamma_j \rangle$$

tiene solución única. Lo cual lo podemos deducir a partir de las propiedades extraídas de las valoraciones esenciales en la Sección 3.4.

En la Sección 3.6 comparamos la Función Zeta, calculada en [79], con la serie de Poincaré. Lo cual a la luz de la formula (1) es completamente trivial. El resultado es que solo coinciden cuando la hipersuperficie casi-ordinaria es una deformación equisingular de una curva plana singular, en otro caso la serie de Poincaré contiene más información.

En la Sección 3.7 ponemos un ejemplo concreto y hacemos detalladamente los cálculos de la serie de Poincaré.

Para finalizar el capítulo, describimos en la Sección 3.8 la serie de Poincaré como la integral con respecto a la característica de Euler de la proyectivización del algebra analítica de la singularidad de la función definida por las valoraciones.

Problemas Abiertos

La primera pregunta obvia que nos podemos hacer es si es posible dar un sistema de generadores minimal o al menos refinar la cota lo máximo posible.

Uno de los trabajos que tenemos abiertos junto con Pedro González Pérez es la invariancia del semigrupo. Asimismo, queremos dar una definición de

normalización simultánea, de todas las ramas a la vez, de una singularidad casi-ordinaria ya que la noción de Lipman para una sola rama no es válida para varias a la vez.

Para que el semigrupo sea un invariante completo de la singularidad falta por probar que los exponentes característicos de cada componente irreducible junto con los ordenes de contacto entre pares de ramas determinan la topología.

Los principales problemas relacionados con la serie de Poincaré en el caso irreducible están resueltos en el Capítulo 3. Aunque si es interesante tratar de generalizar, en la medida de lo posible, todo lo dicho al caso de varias componentes irreducibles.

Introduction

The framework of this thesis is the topological classification of hypersurface quasi-ordinary singularities. Let $(S, 0) \subset (\mathbb{C}^{d+1}, 0)$ be a germ of dimension d , we say that it is quasi-ordinary if it exists a finite morphism $(S, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$ which is unramified outside the divisor of coordinate hyperplanes. This morphism is called quasi-ordinary projection. The most standard family of examples is the one given by the plane curve singularities.

Let $(S_1, 0)$ and $(S_2, 0)$ be two germs of quasi-ordinary hypersurface singularity, we say that they are topologically equivalent, if there exist open sets U and V at the origin, a homeomorphism $\Psi : U \rightarrow V$, and a representant S_i of $(S_i, 0)$, $i=1,2$ such that:

$$\Psi(S_1 \cap U) = S_2 \cap V.$$

Nowadays, the problem of classification is well-understood in the case of plane curves and hypersurfaces of irreducible quasi-ordinary singularities. To solve it, one may use the classical invariants associated to the singularity.

For plane curves, there are many well known invariants: the Puiseux pairs, the multiplicity sequence, the characteristic exponents, the semigroup, the dual graph or the Poincaré series. Whichever of them is equivalent to each other and determines the topological type of the singularity. It is possible to find in the literature many articles where these invariants are used, from the first works of Zariski [97] to the most recent of Campillo-Delgado-Gusein [18]-[27], Theo de Jong-Pfister [37], Greuel-Lossen-Shustin [58], Abhyankar [2], Teissier [96], Eisenbud-Neumann [41] and Brieskorn [10] among others.

In the case of germs of irreducible quasi-ordinary hypersurfaces the bibliography is scarcer. Quasi-ordinary surfaces appeared for the first time in the work of Jung [67] as a natural object in the process of desingularization, since they have the simplest discriminant. Zariski, in [98], also deals with

the quasi-ordinary singularities within the context of resolution of singularities. However, Lipman is who made a deeper study in his Thesis [73]. He introduced the concept of normalized quasi-ordinary branch and proved that every quasi-ordinary irreducible polynomial has a parametrization which has a normalized branch.

Later on, Lipman proved in [75] that, in the case of irreducible quasi-ordinary surfaces, the set of characteristic exponents of a normalized quasi-ordinary branch is an analytic invariant of the singularity. The same result was also proved by Luengo in [77] independently. Afterwards, Gau [46] proved that, in the case of surfaces, the topological type of a quasi-ordinary singularity is determined by the characteristics exponents of the normalized branch. Furthermore, in a joint work with Lipman, they generalize this result for any dimension (see [76, 47]).

The next invariant which appears associated to the singularity is the semigroup of an irreducible quasi-ordinary hypersurface. It was introduced by Kiyek and Micus in [69], proving that in the case of surfaces the semigroup is an analytic invariant of the singularity. The next important step was given by Popescu-Pampu and González Pérez in their thesis [85] and [48] respectively, introducing again the semigroup. Both of them gave different definitions. On the one hand, Popescu-Pampu only considered the functions whose evaluation have a leader monomial (i.e. substitute a root of f in the function), then his semigroups consist of the exponents of the leader monomial after evaluate. On the other hand, González Pérez evaluates all the functions, defining the semigroup as the set of exponents lying in the boundary of the Newton polyhedron after evaluate. They proved that both semigroups coincide. They also proved using different techniques the analytic invariance of the semigroup for arbitrary dimension (see [88], [52] and [49]).

The last objects we are interesting in (mainly in the irreducible case) are the Zeta Function and the Poincaré series. The Zeta Function was calculated by McEwan and Némethi for the irreducible case (see [79]) and by the same authors together with González Pérez for the reducible one (see [51]). Moreover, they proposed the problem of computing the Poincaré series and comparing it with the Zeta Function (see [78]). This is one of the problems we are interesting in.

For the reducible case, there are only a few and recent results and, in them, everything depends on the quasi-ordinary projection. Once the projection is fixed, it seems clear that the important data are the characteristic exponents of each irreducible component together with the order of coincidence between pairs of irreducible components. These data have a partially ordered structure

which may be represented in a clearly way with the Eggers-Wall tree. This tree is studied by Popescu-Pampu in his thesis generalizing the existing one for plane curves.

González Pérez gives in [53] two new algorithms of resolution of quasi-ordinary singularities, both based in the toric resolution of (not necessarily normal) affine toric varieties, which is possible thanks to his joint work with B. Teissier [55].

We emphasize the work of García Barroso and González Pérez in [45] because, from the point of view of our interests (the study of the semigroup), it is the most complete paper concerning the study of reducible quasi-ordinary singularities. They study the polar of a quasi-ordinary hypersurface singularity, and give a decomposition of the polar in bunches of branches that characterize the topological type of each irreducible component of the singularity. For the explicit computation of the semigroup (in Chapter 2) it is very important the formula that gives the intersection of an irreducible component of the singularity with a germ strictly comparable with it (Proposition 5 of [45]).

The aim of this memoir is the study of the semigroup of values for reducible quasi-ordinary singularities and the computation of the Poincaré series for irreducible ones.

In Chapter 1 we fix the notation and define the concepts that we are going to use throughout this work, namely quasi-ordinary singularity, the characteristic exponents, the order of coincidence or what a normalized quasi-ordinary branch is. Moreover, in this chapter we reproduce the generalized Newton algorithm to obtain a parameterization of a quasi-ordinary singularity which is described in [70]. This algorithm is important for us since it gives us an efficient way to obtain the characteristic exponents from the implicit equation of the singularity.

In Chapter 2 we start with a review of the known results for the semigroup in the irreducible case. For the reducible case we consider three sets of functions: the comparables, the rationally comparables and the strictly comparable (see (2.7) and (2.6)); therefore, we have three semigroups, depending on the set of functions we evaluate. Furthermore, we consider one more semigroup which is the natural generalization of the one given by González Pérez in the irreducible case. We see the relations between these semigroups. Finally, we fix as definition of the semigroup the following one:

$$S(f) = \{\underline{\gamma} \in \mathbb{Q}_{n_1}^d \times \cdots \times \mathbb{Q}_{n_r}^d \mid \exists h \in R \text{ such that } \underline{v}(h) = \underline{\gamma}\}.$$

Now we study which properties can be easily generalized from plane cur-

ves, which is well-known. We note that the projection of the semigroup over the i -th component is the semigroup associated to the irreducible component f_i , i.e., $pr_i(S(f)) = S(f_i)$. On the other hand, we see that it is possible to obtain the order of coincidence (see Definition 2.1.4) between the pairs of irreducible components from the semigroup. This implies that it should be possible to deduce the Eggers-Wall tree from the semigroup. We also prove the existence of the conductor and sketch the shape of the semigroup. Our aim is to give a system of generators and our strategy is to consider generic truncations of the roots of f .

In order to obtain such truncations for the quasi-ordinary hypersurface singularities we propose a method that we sketch now. First of all, if f is irreducible and h is rationally comparable to f , then the order of coincidence $k(h, f)$ can only be in the bounded region $C_i = \{\lambda \in \mathbb{Q}^d \mid \lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_{i+1}\}$ (where $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ denote the characteristic exponents). We consider the lattices $M_i := \mathbb{Z}^d + \langle \lambda_1, \dots, \lambda_i \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$, $L_i := \mathbb{Z}(M_i, 1) \subseteq \mathbb{Q}^{d+1}$ and the polytope P_i in \mathbb{R}^{d+1} given by the convex hull of the points $\{Q_j := (\alpha_j, n_j)\}_{j=1}^{2^d}$, where $\{q_j = \alpha_j/n_j\}_{j=1}^{2^d}$ are the 2^d vertices of C_i and n_j is the degree of h_{q_j} (see Definition 2.3.2). The polytope P_i has its vertices in L_i , and they generate a the semigroup $S = \langle Q_1, \dots, Q_{2^d} \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ whose integral closure in L_i is denoted by \overline{S}_{L_i} . The semigroups S and \overline{S}_{L_i} are finitely generated. Moreover, one can see that the elements we are looking for are those that do not decompose in \overline{S}_{L_i} . However it is difficult to compute exactly a system of generator of \overline{S}_{L_i} , so we give an algorithm to compute a system of generators (not necessary minimal).

In order to obtain a system of generators of the semigroup in the reducible case we assume, firstly, that we have two irreducible components f_1, f_2 . Then, we consider the region C_i containing the order of coincidence $k(f_1, f_2)$ and a sub-division of this region in two parts: $C_{i,1} = \{q \in \mathbb{Q}^d \mid \lambda_i < q \leq k(f_1, f_2)\}$ and $C_{i,2} = \{q \in \mathbb{Q}^d \mid k(f_1, f_2) < q \leq \lambda_{i+1}\}$. Repeating for $C_{i,1}$ and $C_{i,2}$ the process described in the above paragraph we obtain a finite set of elements of the semigroups associated to the corresponding regions. If the cardinality of the set of irreducible components $\{f_1, f_2, \dots, f_r\}$ is greater than two, we consider the set $\theta(f) = \{\lambda_j^i\}_{\substack{j=1, \dots, g_i \\ i=1, \dots, r}} \cup \{k(f_i, f_j)\}$ which is partially order and has a structure o a tree, the Eggers-Wall tree. For each two consecutive elements α, β in $\theta(f)$, we consider the set $\{\lambda \in \mathbb{Q}^d \mid \alpha \leq \lambda \leq \beta\}$ which plays the same role as C_i above, so we process as before obtaining a finite set of elements. Moreover, for each component f_i , there exists an unbounded region $\{q \in \mathbb{Q}^d \mid q \geq \lambda_{g_i}\}$, λ_{g_i} being the last characteristic exponent of f_i , which provides us an infinite set of generators which we know how to describe.

Finally, the union of all these sets is a system of generators.

Chapter 3 is dedicated to the study of the Poincaré series and the comparison to the Zeta Function as suggested in [78]. Besides the evident interest that implies answering this proposed question, the Poincaré series has revealed to be an interesting object for several other reasons. From recent results of Campillo, Delgado and Gusein-Zade, it has been seen evidence that the Poincaré series plays an important role unifying some complex invariants; in particular it gives us an algebraic bridge between purely topological invariants (the Alexander polynomial, for example) and other of combinatorial (the dual graph) or algebraic (the values semigroup) type. Also, the Poincaré series is easily generalized to other geometrical situations that are not so well-known as the plane curve singularities, for example the divisorial valuations (see [44] and [35]), rational surfaces (see [25]), toric varieties (see [72]) or the quasi-ordinary hypersurface, our case.

This is one of the reasons why the Poincaré series plays such an important role in our work, and we have worked in solving it in the irreducible quasi-ordinary hypersurface case.

The first interesting observation is that the normalization of any quasi-ordinary hypersurface is a toric variety $(\bar{S}, 0) = (Z_{\rho, N_g}, o_{\rho})$, N_g being the dual lattice of M_g , the lattice generated by \mathbb{Z}^d and the generators of the semigroup and $\rho = \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$. This fact is crucial, because this toric structure allows us to describe the essential divisors at the origin (see [8], [63]) and at the singular locus (see [66], [64] and [54]). The toric structure is also important in the computation of the dimension of the vector spaces defined by the homogeneous components of the multi-graduated ring (resp. the multi-filtrations).

In Section 3.2 we compute the Poincaré series of an irreducible quasi-ordinary hypersurface singularity associated to the essential valuations centered at the origin, following the ideas by Campillo, Delgado and Gusein-Zade. It is defined formally as follows

$$P_W(t_1, \dots, t_r) := \frac{(t_1 - 1) \cdots (t_r - 1)}{t_1 \cdots t_r - 1} \sum_{\underline{a} \in \mathbb{Z}^r} c(\underline{a}) t_{\underline{a}},$$

where $W = (w^1, \dots, w^r)$ are the minimal elements of the set $N_g \cap \overset{\circ}{\sigma}$, with respect to the order $v \leq_{\sigma} v' \Leftrightarrow v' \in v + \sigma$, which are associated to the essential divisors D^1, \dots, D^r and that, as we have already said, are well-known due to the recent results of Bouvier, Ishii, Kollar and González Pérez. For every $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ we consider $J(\underline{a}) = \{h \in R \mid \nu_{w^1}(h) \geq a_1, \dots, \nu_{w^r}(h) \geq a_r\}$ and $c(\underline{a}) := \dim_{\mathbb{C}} J(\underline{a}) / J(\underline{a} + \underline{1})$, $\nu_W = (\nu_{w^1}, \dots, \nu_{w^r})$ being the essential

valuations corresponding to the essential divisors and $\underline{1} = (1, \dots, 1)$.

In order to compute a closed formula for the Poincaré series we consider the map $\Phi_W : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^r$, defined as $\Phi_W(\gamma) = (\langle w^1, \gamma \rangle, \dots, \langle w^r, \gamma \rangle)$, where Γ is the semigroup associated to the singularity. Thanks to the structure of the semigroup we know how to compute $P_\Gamma := \sum_{\gamma \in \Gamma} u^\gamma$, therefore we are also able to compute the Poincaré series as follows: $P_W(t_1, \dots, t_r) = \Phi_W(P_\Gamma)$. At the end of this section we show that the Poincaré series of a multi-filtration does not in general determine the semigroup. This happens when there are not enough linearly independent essential valuations centered at the origin. Therefore we suggest, as a solution, to include the essential valuations centered at the singular locus, but now it may happen that the dimensions $c(\underline{a})$ are infinite.

To solve this problem, we introduce in Section 3.3 the multi-graduate ring $gr_{\underline{\nu}}(\mathcal{O}_S) = \bigoplus_{\underline{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} J(a_1, \dots, a_r)$, where $\underline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_r)$ is the set of essential valuations, and at least one of them is centered at the origin in order to guarantee that $c_{\underline{a}} = \dim_{\mathbb{C}} J(\underline{a})$ is finite. We also prove that

$$gr_{\underline{\nu}}(\mathcal{O}_S) \cong \mathbb{C}[\Gamma]^{w_1, \dots, w_{k+1}} = \bigoplus_{a_1, \dots, a_{k+1} \geq 0} \left(\bigoplus_{\substack{\langle w_1, u \rangle = a_1 \\ \vdots \\ \langle w_{k+1}, u \rangle = a_{k+1}}} \mathbb{C} \underline{X}^u \right)$$

where Γ is the semigroup of the singularity and $w_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ are the vectors of integer defining the essential valuations ν_i , $i = 1, \dots, r$. As a consequence of this we obtain that

$$c_{\underline{a}} = \{u \in \Gamma \mid \langle w_j, u \rangle = a_j, j = 1, \dots, r\}.$$

This formula of the dimension allows us to compute the Poincaré series in an effective way:

$$P_\Gamma^{\Phi_W} = P_{\underline{\nu}}(\underline{t}) = \frac{1}{1 - \underline{t}^{\langle w, e_1 \rangle}} \cdots \frac{1}{1 - \underline{t}^{\langle w, e_d \rangle}} \cdot \frac{1 - \underline{t}^{\langle w, n_1 \gamma_1 \rangle}}{1 - \underline{t}^{\langle w, \gamma_1 \rangle}} \cdots \frac{1 - \underline{t}^{\langle w, n_g \gamma_g \rangle}}{1 - \underline{t}^{\langle w, \gamma_g \rangle}}. \quad (2)$$

In Section 3.4 we study the essential divisors by using the results, mentioned above, by Bouvier, Ishii, Kollar and González Pérez. These ones, together with Lipman's Theorem 7.3 in [76], make possible to deduce certain properties of the essential divisors. We organize these divisors as the rows of a matrix which we denote by \mathcal{M}_f^w .

In Section 3.5 we give an algorithm (the proof of Theorem 3.5.4) which allows us to get the normalized characteristic exponents from the Poincaré series. The general idea, except in some technical cases, is that we are able to

read the essential matrix \mathcal{M}_f^w and the values $\langle \underline{w}, \gamma_j \rangle$, for all j , from the Poincaré series, where γ_j are the generators of γ . Then the problem is reduced (except for one case) to study whether the linear system of equations

$$\mathcal{M}_f^w \gamma = \langle \underline{w}, \gamma_j \rangle$$

has a unique solution. In order to solve this problem we use the properties given by the essential valuations in Section 3.4.

In Section 3.6 we compare the Zeta Function, already computed in [79], with the Poincaré series. Because of formula (2) this comparison is very easy. The result says that they only coincide when the quasi-ordinary singularity is an equisingular deformation of a plane curve singularity, otherwise the Poincaré series provides more information than the Zeta Function.

In Section 3.7 we show a concrete example computing every step of the above algorithm to get the Poincaré series and the semigroup from it.

Finally in Section 3.8 we write the Poincaré series as the integral with respect to the Euler characteristic of the projectivization of the analytic algebra of the singularity, of a function defined by the valuations.

Open problems

The first natural question is whether it is possible to give a minimal system of generators of the semigroup or at least to give a more convenient bound.

One of the open problems that we are working in with Pedro González Pérez is the invariance of the semigroup. Furthermore we would also like to give a definition of simultaneous normalization, of all the irreducible components at the same time, of a quasi-ordinary singularity since the one given by Lipman works only for one irreducible component.

If one wants the semigroup to be a complete invariant of the singularity it remains to prove that the characteristic exponents of each irreducible component together with the orders of coincidence between pairs of components determine the topological type.

All the problems concerning to the Poincaré series in the irreducible case are solved in Chapter 3. However it seem interesting to generalize, as far as possible, all we have said for the case of several irreducible components.

Summarize of Chapter 2

Since the thesis must be in Spanish, now we give a translation of the results in the second chapter.

The Irreducible Case

Let $(S, 0)$ be a irreducible quasi-ordinary hypersurface singularity parameterized by a quasi-ordinary branch ζ and equation $f = 0$. Let $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ be the characteristic exponents associated to ζ and for $j = 0, \dots, g$ consider the lattices $M_j = \mathbb{Z}^d + \lambda_1\mathbb{Z} + \dots + \lambda_j\mathbb{Z}$.

We define:

$$\gamma_1 = \lambda_1, \quad \gamma_{j+1} = n_j\gamma_j + \lambda_{j+1} - \lambda_j, \quad \text{for } j = 1, \dots, g-1. \quad (3)$$

We consider the subsemigroups of $(\mathbb{Q}_n^d, +)$, defined by:

$$\Gamma_j(f) = \mathbb{Z}_{\geq 0}^d + \gamma_1\mathbb{Z}_{\geq 0} + \dots + \gamma_j\mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \text{for } j = 0, \dots, g.$$

Is it possible to make a parallel study if we consider,

$$\bar{\gamma}_1 = n\lambda_1, \quad \bar{\gamma}_{j+1} = n_j\bar{\gamma}_j + n\lambda_{j+1} - n\lambda_j, \quad \text{for } j = 1, \dots, g-1. \quad (4)$$

Definition 0.0.1. The **semigroup** of the quasi-ordinary singularity parameterized by the quasi-ordinary-branch ζ is the semigroup $\Gamma_g(f)$, which we also denote by Γ if it is clear in the context.

Similarly we denote by Γ_j to the semigroups $\Gamma_j(f)$.

The semigroup of a quasi-ordinary singularity parameterized by the branch ζ is characterized by the following properties, (see [52, Lemma 3.3]):

Proposition 0.0.2.

- (1) The sub-lattice of M_g generated by Γ_j is equal to M_j for $0 \leq j \leq g$.
- (2) The order of the image of γ_j in the group M_j/M_{j-1} is equal to n_j for $j = 1, \dots, g$.
- (3) We have that $\gamma_j > n_{j-1}\gamma_{j-1}$ for $j = 2, \dots, g$.
- (4) If the vector $u_j \in M_j$ do not have negative coordinates, then $u_j + n_j\gamma_j$ belongs to the semigroup Γ_j .

- (5) The vector $n_j \gamma_j$ is in the semigroup Γ_{j-1} for $j = 1, \dots, g$. Moreover, it is possible to write it in a unique way as

$$n_j \gamma_j = \alpha^{(j)} + l_1^{(j)} \gamma_1 + \dots + l_{j-1}^{(j)} \gamma_{j-1} \quad (5)$$

such that $0 \leq l_i^{(j)} \leq n_i - 1$ y $\alpha^{(j)} \in M_0$ for $j = 1, \dots, g$.

This result is the analogous to the given by Teissier for plane curves (see [96], [101]).

Given $h \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_d]][Y]$, we say that $h(\zeta) \in R = \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_d]][\zeta]$ has **order** $\alpha \in \mathbb{Q}_n^d$, if $h(\zeta) = \underline{X}^\alpha U$, where U is a unit in $R_{d,n}$. In this case we write $v(h) = \alpha$, although v it is not a valuation. When this happens we say that h has a **dominant exponent** for ζ or that is **comparable** with f . We denote by C_f the set of monic polynomials comparable with f :

$$C_f = \{h \in R \mid h \text{ mónico, } \exists v(h)\}. \quad (6)$$

Kiyek with Micus (see [69]) and Popescu-Pampu (see [88]) separately, define the semigroup of ζ as the set of orders of functions comparable with f showing that its characterization in terms of the characteristic exponents, i.e., they prove that

$$\Gamma_g(f) = \{v(h) \in \mathbb{Q}_n^d \mid h \in C_f\}.$$

Let $\eta = \sum c_v \underline{X}^v \in R_{d,n}$ and $\text{supp}(\eta) = \{v \mid c_v \neq 0\}$ the **support** of η . The **Newton polyhedron** of η , $\mathcal{N}(\eta)$, is the convex hull of the set

$\bigcup_{v \in \text{supp}(\eta)} (v + \mathbb{R}_+^d)$. The border $\partial \mathcal{N}(\eta)$ of the Newton polyhedron of η is the

Newton polygon. Let ζ be a quasi-ordinary branch of f , and $h \in \mathbb{C}[[X]][Y]$. We denote to the Newton polyhedron of $h(\zeta) \in R_{d,n}$ by $\mathcal{N}_\zeta(h)$. Notice that say that h is comparable with f is equivalent to say that $\mathcal{N}_\zeta(h) = \alpha + \mathbb{R}_{\geq 0}^d$, where α is the order of h .

Let $\zeta = \sum c_\lambda \underline{X}^\lambda \in R_{d,n}$ be a root of f and $\sigma \in \text{Gal}(L_{d,n}/L_d)$ an element of the Galois group of the extensión $L_{d,n}/L_d$. Since $\sigma(\zeta) = \sum c_\lambda \epsilon^{(s,\lambda)} \underline{X}^\lambda$ for a $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}^d$, and ϵ is a primitive n -th root of the unit, is clear that $\text{supp}(\zeta) = \text{supp}(\sigma(\zeta))$, i.e., all the roots of f have the same support. As a consequence

$$\{\lambda_{i,j} \mid (\zeta_i - \zeta_j) = \underline{X}^{\lambda_{i,j}} U_{i,j}\} = \{\lambda_{1,k} \mid (\zeta_1 - \zeta_k) = \underline{X}^{\lambda_{1,k}} U_{1,k}\} \subset \text{supp}(\zeta).$$

In general if $\eta = \sum c_\alpha \underline{X}^\alpha \in R_{d,n}$ and $\sigma \in \text{Gal}(L_{d,n}/L_d)$ we have that $\text{supp}(\eta) = \text{supp}(\sigma(\eta))$ and then $\mathcal{N}(\eta) = \mathcal{N}(\sigma(\eta))$. In particular, if h belongs to $\mathbb{C}[[X]][Y]$ and ζ_1, \dots, ζ_n are all the roots of f , then we have that

$h(\zeta_1), \dots, h(\zeta_n)$ are conjugates with respect to the action of the Galois group of $L_{d,n}/L_d$ and therefore $\mathcal{N}_\zeta(h)$ is independent of the root ζ considered.

If moreover we suppose that h is comparable with f (i.e. exists $v(h)$), then we have that $v(h)$ does not depend on the root ζ chosen. Notice that $v(h) = \alpha \in \mathbb{Q}^d \Leftrightarrow \mathcal{N}_\zeta(h) = \alpha + \mathbb{R}_{\geq 0}^d$.

On the other hand we know that the resultant of f and h is $Res(h, f) = \prod_{i=1}^n h(\zeta_i)$. We have that $v(h) = \alpha \in \mathbb{Q}^d$ if and only if for $i = 1, \dots, n$ is verified that $h(\zeta_i) = \underline{X}^\alpha U_i$ with U a unit, which is equivalent to $Res(h, f) = \underline{X}^{n\alpha} U$. That is we have seen that

Proposition 0.0.3. A germ h is comparable with f if and only if $Res(h, f) = \underline{X}^\delta U$ with $U \in \mathbb{C}[[X]]$ a unit and $\delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$. Moreover, $v(h) = \alpha$ iff $\delta = n\alpha$.

The set of germs which are **strictly comparable** with f , is the set

$$RC_f = \{h \in \mathbb{C}[[X]][Y] \mid h \text{ monic and } fh \text{ is quasi-ordinary}\} \quad (7)$$

Example 0.1. Let $f = Y - X_1 X_2$ be a quasi-ordinary polynomial and $h = Y - X_1 X_2 (X_1 + X_2)$ not, then $h \notin RC_f$, but since $h(X_1 X_2) = X_1 X_2 (1 - X_1 - X_2)$ then $h \in C_f$.

We are going to generalize the concept of order of coincidence or contact order to a more general set of functions (not only strictly comparable). We denote by $\widetilde{R}_d = \widetilde{\mathbb{C}[[X]]}$ the ring of power series with fractionary exponents, that is, $\widetilde{R}_d = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{d,n}$.

Following the notation by Popescu-Pampu (see [85]), given two elements $\xi, \eta \in \widetilde{R}_d$ we say that are **comparable** if $\xi - \eta = \underline{X}^\alpha U$, with U a unit, or we also say that $k(\xi, \eta) = \alpha$. Is clear that if $f \in R_d[Y]$ is a monic polynomial we have that f is quasi-ordinary if and only if all its roots are in \widetilde{R}_d and moreover are comparable between pairs of them.

In the same way, if $g, h \in R_d[Y]$ are monic we denote by $\mathcal{R}(g)$ and $\mathcal{R}(h)$ their respective sets of roots and we say that are **rationally comparable** if the roots of both are rational; that is, exists m such that $\mathcal{R}(g) \cup \mathcal{R}(h) \subset R_{d,m} \subset \widetilde{R}_d$, and moreover for each $\xi \in \mathcal{R}(g)$ and $\eta \in \mathcal{R}(h)$, then ξ and η are comparable. The set of functions rationally comparable to the quasi-ordinary singularity f is denoted by,

$$\hat{C}_f = \{h \in R_d[Y] \mid h \text{ monic and rationally comparable with } f\}.$$

If g is irreducible and ξ is a fix root of f , we have that g and h are rationally comparable if ξ and η_j are comparable for every root η_j of h and

moreover

$$\{k(\xi, \eta) \mid \eta \in \mathcal{R}(h)\} = \{k(\xi, \eta) \mid \xi \in \mathcal{R}(f), \eta \in \mathcal{R}(h)\}.$$

Let us fix now $f \in R_d[Y]$ a irreducible quasi-ordinary polynomial, and $h \in R_d[Y]$ monic such that the roots of h are fractionary , i.e., $\mathcal{R}(h) \subset \widetilde{R}_d$. Suppose that exists $v(h)$, $v(h) = \text{ord}_X h(\zeta) = \alpha$, with ζ a root of f . If $\mathcal{R}(h) = \{\eta_1, \dots, \eta_s\}$, we have that $h(\zeta) = \prod_{i=1}^s (\zeta - \eta_i) = \underline{X}^\alpha U$. Therefore ζ is comparable with $\eta_i \forall i = 1, \dots, s$ and h is rationally comparable with f . Conversely if f is rationally comparable with h then exists $v(h)$.

Definition 0.0.4. Let $f, h \in R_d[Y]$ be irreducible and monic polynomials. Suppose that $\mathcal{R}(f) \cup \mathcal{R}(h) \subset R_{d,m} \subset \widetilde{R}_d$. We say that f and h have **order of coincidence** $k(f, h)$ if:

1. f and h are rationally comparable.
2. Exist $\max\{k(\zeta, \eta) \mid \zeta \in \mathcal{R}(f), \eta \in \mathcal{R}(h)\} = k$, and moreover $k = k(f, h)$.

Proposition 0.0.5. Let f be a quasi-ordinary irreducible polynomial, and let h be monic and irreducible. Suppose that f and h are rationally comparable, then $\{k(\zeta, \eta) \mid \zeta \in \mathcal{R}(f), \eta \in \mathcal{R}(h)\}$ is totally ordered, in particular exists the order of coincidence of $k(f, h)$.

As a consequence we have the following.

Corollary 0.0.6. If $f \in R_d[Y]$ is an irreducible quasi-ordinary polynomial and $h \in R_d[Y]$ is irreducible are equivalents:

1. f and h are comparable and moreover exists m such that $\mathcal{R}(h) \subset R_{d,m}$.
2. f and h are rationally comparable.
3. Exists the order of coincidence of f and h .

We can say even more about the relation of the roots of f with an element of \widetilde{R}_d .

Lemma 0.0.7. Let f be an irreducible quasi-ordinary polynomial and let $\eta \in \widetilde{R}_d$. Suppose that η is comparable with f , i.e., is comparable with all the roots of f . The the set

$$\{k(\eta, \zeta) \mid f(\zeta) = 0\} \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_g\}$$

is totally ordered.

Then if h is irreducible and monic with $\mathcal{R}(h) \subset \widetilde{R}_d$ and comparable with f then the set

$$\{k(\eta, \zeta) \mid \zeta \in \mathcal{R}(f), \eta \in \mathcal{R}(h) \cup \mathcal{R}(f), \eta \neq \zeta\}$$

is totally ordered. What it is not true in general is that two roots $\eta, \eta' \in \mathcal{R}(h)$ are comparable, this it is the difference with $h \in RC_f$.

Remark 0.1. Let f be an irreducible quasi-ordinary polynomial with $f(\zeta) = 0$ and let h monic and irreducible with $h(\eta) = 0$ and $\eta \in \widetilde{R}_d$, are equivalents:

1. η is comparable with all the roots of f .
2. h is comparable with f .
3. ζ is comparable with all the roots of h .

Definition 0.0.8. Let $j = 0, \dots, g-1$. A j -semi-root of f is a quasi-ordinary irreducible polynomial, $q_j \in \mathbb{C}[[\underline{X}]]\langle Y \rangle$, of degree $n_0 \cdots n_j$ and with order of coincidence λ_{j+1} with f .

Now we are able to give the following result.

Proposition 0.0.9. (Proposition 3.2 in [52]) For each $j = 1 \dots, g-1$ we consider $q \in \mathbb{C}[[\underline{X}]]\langle Y \rangle$ an irreducible quasi-ordinary polynomial of degree $n_0 \cdots n_j$. The following properties are equivalents:

- (1) q has order of coincidence λ_{j+1} with f .
- (2) $\text{Res}_Y(f, q) = X^{\overline{\gamma}_{j+1}} U_j$, with $U_j \in \mathbb{C}[[\underline{X}]]$ a unit.
- (3) $q(\zeta) = X^{\overline{\gamma}_{j+1}} U_j$, with $U_j \in \mathbb{C}[[M_g \cap \mathbb{Q}_+^d]]$ a unit.

Let $\zeta = \sum c_\lambda \underline{X}^\lambda$ be a root of f with $\zeta = p_0 + \dots + p_g$. It is clear that $\eta_j = p_0 + \dots + p_j$ is a quasi-ordinary branch with characteristic exponents $\lambda_1 < \dots < \lambda_j$ and its minimal polynomial q_j is quasi-ordinary, has degree $n_0 \cdots n_j$ and the order of coincidence $k(q_j, f)$ is λ_{j+1} . Therefore, for each $j = 0, \dots, g-1$, exists a j -semi-root. Finally we take $q_g = f$.

Notice that the j -semi-roots of f , q_0, \dots, q_{g-1} , are quasi-ordinary polynomials comparable with f , thus are strictly comparable with f , i.e., $q_j \cdot f$ is a quasi-ordinary polynomial. As a consequence the semigroup of f may be obtained evaluating just monic polynomials strictly comparable with f ,

because the dominant exponentes of the semi-roots provide us a system of generators of the semigroup. That is,

$$\Gamma_g(f) = \{v(h) \mid h \in RC_f\} .$$

The following property, described in [88, Lemma 7.2], show us how to write any polynomial $h \in R_d[Y]$ in terms of the semi-roots of f . We denote by $\deg(h)$ its degree (as polynomial in Y).

Lemma 0.0.10. Every element $h \in \mathbb{C}[[\underline{X}]] [Y]$ may be written in a unique way as the sum, $h = \sum c_{j_0, \dots, j_g} (q_0)^{j_0} \cdots (q_g)^{j_g}$ with $c_{j_0, \dots, j_g} \in \mathbb{C}[[\underline{X}]]$, and the $(g + 1)$ -tuple $(j_0, \dots, j_g) \in \mathbb{N}^{g+1}$ verify that $0 \leq j_k \leq n_{k+1} - 1, \forall k \in \{0, \dots, g - 1\}$, and $j_g \leq [\deg(h)/n]$.

The last expression for h it is called the (q_0, \dots, q_g) -adic expansion of h . The next property correspond with [88, Lemma 7.4], and is a direct consequence of the unique write in the semigroup, see (5) in the Proposition 0.0.2.

Lemma 0.0.11. Let ζ be a root of f and $h = \sum c_{j_0, \dots, j_g} (q_0)^{j_0} \cdots (q_g)^{j_g}$ the $(q_0 \cdots q_g)$ -adic expansion of $h \in R$. Then the sets of vertices of the Newton polygons $\partial \mathcal{N}_\zeta(c_{j_0, \dots, j_g} (q_0)^{j_0} \cdots (q_g)^{j_g})$ are disjoint when (j_0, \dots, j_g) runs in the $(q_0 \cdots q_g)$ -adic expansion of h .

P. González Pérez gives a more general definition of the semigroup. He propose to evaluate in all the functions of R , and when the Newton polyhedron is not a point (the functions are not comparable) the semigroup consist on all the vertices which appears in the polygon, more precisely:

$$\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = \{\gamma \in \mathbb{Q}_+^d \mid \exists h \in R \text{ con } \gamma \in \partial \mathcal{N}_\zeta(h) \cap \text{supp}(h(\zeta))\}.$$

Notice that from the above lemmas we have that the set of vertices of the Newton polygon of $h(\zeta)$ which are in the support of $h(\zeta)$ are the same as the vertices in the polygons of each term in the (q_0, \dots, q_g) -adic expansion. Since the Newton polygon of $q_0(\zeta)^{j_0} \cdots q_{g-1}(\zeta)^{j_{g-1}}$ is a point, for each term in the expansion of h the vertices of its polygon which are in the support may be obtained from polynomials which are comparable with f (in fact are strictly comparable). Thus as a consequence we have that:

Theorem 0.0.12. The semigroups $\Gamma_g(f)$ and $\Gamma_{\mathcal{N}}(f)$ coincide.

In Chapter 3 we use the following important result, the normalization of any quasi-ordinary singularity is a toric variety. So, let us study how is the normalization of an irreducible quasi-ordinary hypersurface singularity, that is the integer closure of $R = R_d[\zeta]$.

Definition 0.0.13. Let M be a free \mathbb{Z} -module finitely generated (a lattice), let Δ be a subsemigroup of M , and $G(\Delta)$ the \mathbb{Z} -submodule of M generated by Δ . The subsemigroup $\cup_{t \in \mathbb{N}} (\frac{1}{t}\Delta) \cap G(\Delta)$ of M it is called the **saturation** of Δ , we denote it by $\overline{\Delta}$. It is said that Δ is **saturated** if $\overline{\Delta} = \Delta$.

We denote by \overline{R} the integer closure of R and by $\overline{\Gamma}$ the saturation of Γ . The following result may be found in [70], which gives a description of \overline{R} .

Proposition 0.0.14.

- (1) \overline{R} is the integer closure of $R_d[\underline{X}^{\gamma_1}, \dots, \underline{X}^{\gamma_g}]$.
- (2) An element $z \in R_{d,n}$ is in \overline{R} iff $Supp(z) \subset \overline{\Gamma}_g$.
- (3) Let $\Sigma = \{l_1\overline{\gamma}_1 + \dots + l_g\overline{\gamma}_g \mid 0 \leq l_i \leq n_i - 1, i = 1, \dots, g\}$ be the set of strictly linear combinations of $\overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_g$, and $\Sigma' := \{s \bmod n \mid s \in \Sigma\}$. Then $\{\underline{X}^{s/n} \mid s \in \Sigma'\}$ is a system of generators of \overline{R} as R_d -module, moreover $\sharp(\Sigma') = n$.

Pedro González in his thesis (see [48]) gives a proof in terms of toric geometry. Also Patrick Popescu-Pampu (see [85]) gives a proof, but he also gives an algorithms to compute the normalization of a germs of a quasi-ordinary hypersurface.

Once we know the saturation of Γ_g , $\overline{\Gamma}_g = M_g \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^d$, we can introduce the conductor of Γ_g .

Definition 0.0.15. Let C_{Γ_g} be the set of elements $c \in \Gamma_g$ verifying that, $\forall \gamma \geq c$ with $\gamma \in \overline{\Gamma}_g$ we have that $\gamma \in \Gamma_g$. The set C_{Γ_g} it is called the **conductor set** of Γ_g .

The element $n_g\gamma_g \in C_{\Gamma_g}$, thus $C_{\Gamma_g} \neq \emptyset$. Is possible that there exist $c_1, c_2 \in C_{\Gamma_g}$ with $c_1 \not\leq c_2$ and $c_2 \not\leq c_1$.

Reducible case

Let $(S, 0)$ be a quasi-ordinary hypersurface singularity defined by a quasi-ordinary polynomial of degree n , $f = \prod_{i=1}^r f_i$. Each irreducible factor, f_i , define an irreducible quasi-ordinary hypersurface, $S_i = \{f_i = 0\}$, moreover $f_i \neq f_j$ if $i \neq j$. We denote by n^i the degree of f_i , $i = 1, \dots, r$. Is clear that $n = \sum_{i=1}^r n^i$. For each $i = 1, \dots, r$ we denote by $\zeta_i \in R_{d, n^i}$ a root of f_i .

Generalizing the notations from the irreducible case, for each $i = 1, \dots, r$ we denote by, λ_j^i with $j = 1, \dots, g_i$ the characteristic exponents of f_i and by

$\Gamma_j^i = \mathbb{Z}_{\geq 0}^d + \sum_{k=1}^j \gamma_k^i \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (resp. $M_j^i = \langle \Gamma_j^i \rangle$) the j -th semigroup (resp. lattice) associated to f_i , where e_j^i is the order of M_{j-1}^i in M_j^i and $n_j^i = e_{j-1}^i / e_j^i$.

The definitions of comparable polynomials, rationally comparable and strictly comparable may be easily extended to the reducible case. So, for each $i = 1, \dots, r$, and $h \in R$ we denote by $v_i(h)$ to the order of $h(\zeta_i)$ (if exists), and by

$$C_f = \{h \in R \mid h \text{ monic}, \exists \underline{v}(h) = (v_1(h), \dots, v_r(h))\} \quad (8)$$

the set of functions **comparable** with f .

Proposition 0.0.16. Let h be a germ comparable with f , then the resultant $\text{Res}(h, f_1 \cdots f_r) = \prod_{i=1}^r \text{Res}(h, f_i) = \underline{X}^{\deg(f_1)v_1(h) + \dots + \deg(f_r)v_r(h)} \cdot U$, with $U(0) \neq 0$, moreover

$$C_f = \{h \in R \mid h \text{ monic}, \text{Res}(h, f) = \underline{X}^\delta \cdot U, U(0) \neq 0, \delta \in \mathbb{Z}^d\}.$$

The set of germs which are **strictly comparable** with f , is the set

$$RC_f = \{h \in \mathbb{C}[[X]][[Y]] \mid h \text{ monic and } fh \text{ is quasi-ordinary}\}. \quad (9)$$

Finally a polynomial $h \in R$ is **rationally comparable** with f if it is rationally comparable with all the factors f_1, \dots, f_r and we denote by \hat{C}_f the set of rationally comparable functions.

Let h be irreducible such that $\mathcal{R}(h) \subset R_{d,m} \subset \widetilde{R}_d$. In this conditions we have the following results.

Proposition 0.0.17. If h is rationally comparable with f , then the set $\{k(h, f_i); i = 1, \dots, r\}$ is totally ordered. In particular, exists the maximum of the set $\{k(h, f_i); i = 1, \dots, r\}$.

We have three kind of polynomials to be evaluated: $RC_f \subseteq \hat{C}_f \subseteq C_f$. In the example 0.1 we saw that $RC_f \subsetneq C_f$, but it is also clear that $RC_f \subsetneq \hat{C}_f$. Now we give an example where we show that $\hat{C}_f \subsetneq C_f$. Therefore we have that:

$$RC_f \subsetneq \hat{C}_f \subsetneq C_f.$$

Example 0.2. 1. Consider $f = Y^2 - X_1X_2$ and $h = Y^2 - X_1X_2(X_1 + X_2)$. A root of f is $\zeta = X_1^{1/2}X_2^{1/2}$, then $h(\zeta) = X_1X_2 \cdot U$, with U a unit. This show that $h \in C_f$. On the other hand the roots of h are of the form $\eta_1 = \sqrt{X_1X_2}\sqrt{X_1 + X_2}$ and $\eta_2 = -\sqrt{X_1X_2}\sqrt{X_1 + X_2}$. Let us see that $\eta_1 \notin R_{d,n}, \forall n$. It is enough to see that there is no n such that $h \in R_{d,n}$

and $\eta^2 = X_1 + X_2$, i.e., $\eta = (X_1 + X_2)^{1/2} \notin R_{d,n}$. Let us suppose that exists n with $\eta \in R_{d,n}$.

We know that exists m such that $\eta \in L_{d,m}$, and that the field extension $L_d \subset L_{d,m}$ is abelian, therefore the Galois group $G = Gal(L_{d,m}/L_d)$ is isomorphic to $\mathbb{Z}_m \times \cdots \times \mathbb{Z}_m$. Thus the roots of the minimal polynomial of η are conjugated by the action of G . We may suppose that m is odd. We also know that the order of the group $[L_d(\eta)/L_d] = 2$ since the minimal polynomial is $Y^2 - X_1X_2 = 0$. From this we deduce that exists n such that $\eta \in R_{d,n}$ with n necessary equal to 2. In one hand η and $-\eta$ are root of the minimal polynomial, on the other hand we we conjugate them by G we also obtain $(X_1 - X_2)^{1/2}$ and $(-X_1 + X_2)^{1/2}$ which are not roots of $Y^2 - (X_1 + X_2)$, contradiction.

2. Another example with f reducible. Consider $f = Y(Y - X_1)$ and $h = Y^2 + Y(X_1 - X_2) + X_1X_2$. The evaluations of h are $h(0) = X_1X_2$ and $h(X_1) = X_1^2U$. But h do not have fractionary roots since these are $\zeta = \frac{-(X_1 - X_2) \pm \sqrt{X_1^2 + X_2^2 - 6X_1X_2}}{2} \notin R_{d,n}$ for all n .

We may give, depending on the three different sets of functions, different semigroups in the reducible case. Moreover it is possible to consider the natural extension to the construction of P. González Pérez based in the Newton polygons.

Definition 0.0.18. We consider the following additive subsemigroups of $\mathbb{Q}_{n_1}^d \times \cdots \times \mathbb{Q}_{n_r}^d$

$$S_1(f) = \{\underline{v}(h) \mid h \in RC_f\}.$$

$$S(f) = \{\underline{v}(h) \mid h \in \hat{C}_f\}.$$

$$S_2(f) = \{\underline{v}(h) \mid h \in C_f\}.$$

$$S_3(f) = \{(s_1, \dots, s_r) \mid \exists h \in R \text{ with } s_i \in \partial\mathcal{N}_{\zeta_i}(h) \cap \text{supp}(h(\zeta_i)), \forall i\}.$$

It is clear that we have,

$$S_1(f) \subset S(f) \subset S_2(f) \subset S_3(f).$$

We devote the rest of this section to study the relations between the semigroups.

Proposition 0.0.19. $S(f) \neq S_2(f)$

In order to see that S_f and $S_1(f)$ are equal we need some result related to the case of f irreducible. Thus, in the following result we assume f to be irreducible.

Proposition 0.0.20. Let f be an irreducible quasi-ordinary polynomial, $h \in \hat{C}_f$ an irreducible polynomial rationally comparable with f and $k(f, h)$ the order of coincidence. Let q be such that $\lambda_q < k(h, f) \leq \lambda_{q+1}$. Then we have that

$$v(h) = \frac{\rho(h, f)}{\deg(f)} = \frac{\deg(h)}{\deg(f)} \left(e_q k(h, f) + \sum_{k=1}^q (e_{k-1} - e_k) \lambda_k \right). \quad (10)$$

The last formula is known if $h \in RC_f$ and is due to Evelia García and Pedro González (see [45]). It is clear that in this case we may write the same formula in terms of the quasi-ordinary hypersurface h . Since $\lambda_q < k(h, f) \leq \lambda_{q+1}$ we have that $\lambda_i^h = \lambda_i$, $\gamma_i^h = \gamma_i$, $n_i^h = n_i$ for $i = 1, \dots, q$. Therefore $e_i^h \deg(f) = e_i \deg(h)$ for $i = 0, 1, \dots, q$ and

$$\frac{\rho(h, f)}{\deg(f)} = e_q^h k(h, f) + \sum_{k=1}^q (e_{k-1}^h - e_k^h) \lambda_k^h; \quad (11)$$

where $\lambda_j^h, e_j^h, \gamma_j^h, \dots$ are the corresponding data of h .

It is also possible to rewrite it in terms of the generators of the semigroup, following the parallel case of plane curves (see [31]):

$$\frac{\rho(h, f)}{\deg(f)} = \gamma_q^h e_{q-1}^h - \lambda_q^h e_q^h + k(h, f) e_q^h = \frac{\deg(h)}{\deg(f)} e_q (k(h, f) - \lambda_q + n_q \gamma_q). \quad (12)$$

Definition 0.0.21. Let $\eta = \sum a_\lambda \underline{X}^\lambda \in R_{d,n}$. We say that η^δ is a **truncation** of η at $\delta \in \mathbb{Q}^d$ if $\eta^\delta = \sum_{\lambda \not\geq \delta} a_\lambda \underline{X}^\lambda + a_\delta \underline{X}^\delta$.

Let $h \in \hat{C}_f$ be an irreducible germ with root η and value in the semigroup. Let η^δ be a truncation of η at δ . Abusing of the term, we also say that the minimal polynomial h^δ of η^δ is a truncation of h at δ .

Remark 0.2. Observe that in the write $\eta = \sum_{\lambda \not\geq \delta} a_\lambda \underline{X}^\lambda + a_\delta \underline{X}^\delta$, is possible that $a_{\delta=0}$ (if it is so in η).

Proposition 0.0.22. Let f be an irreducible quasi ordinary polynomial and $h \in \hat{C}_f$ an irreducible germ with $k(f, h) = \delta$. Then $\deg(h^\delta)$ divides $\deg(h)$ and

$$v(h) = \frac{\deg(h)}{\deg(h^\delta)} v(h^\delta).$$

If we suppose that $f = \prod_{i=1}^r f_i$ is quasi-ordinary and reducible, then for each irreducible germ h and for each irreducible component f_i we may consider $k(h, f_i)$. We denote by $k_h = \max\{k(h, f_i) : i = 1, \dots, r\}$.

Theorem 0.0.23. Let $f = \prod_{i=1}^r f_i$ be a quasi-ordinary polynomial with r irreducible components f_1, \dots, f_r . Then $S(f) = S_1(f)$.

In the same way that the Definition 0.0.18 is the natural generalization of the semigroup defined by Popescu-Pampu in [88] or Micus-Kiyek in [69] when there is only one irreducible component, we also may take as a definition the generalization of the semigroup defined by González Pérez in [52].

Definition 0.0.24. We consider the semigroup,

$$S_3(f) = \{(s_1, \dots, s_r) \mid s_i \in \partial\mathcal{N}_i(h) \cap \text{supp}(h(\zeta_i)), \forall i, h \in R\}.$$

Proposition 0.0.25. $S(f) \neq S_3(f)$, except when $r = 1$.

Gau [47] and Lipman in [75, 76], prove that the semigroup of values determine the topological type of the singularity in the irreducible case. Is a conjecture that the semigroup of each irreducible component together with the orders of coincidence between pairs of branches determine the topological type of the singularity.

If we are able to obtain the semigroups of each irreducible component and the orders of coincidence between pairs of branches, we could think that the semigroup is “well defined” in the sense of the conjecture. In any case these properties are always interesting.

We denote by pr_i to the i -th projection of $S(f)$, which send to each $s = (s_1, \dots, s_r) \in S(f)$ in $pr_i(s) = s_i$.

Lemma 0.0.26. Once we fix $i \in \{1, \dots, r\}$, there exist $q_1^i, \dots, q_{g_i-1}^i$ semi-roots of f_i such that $q_j^i \in RC_f \forall j = 0, \dots, g_i$.

For $i = 1, \dots, r$ let $\Gamma^i = \Gamma_{g_i}^i$ be the semigroup of the irreducible quasi-ordinary hypersurface defined by f_i . It is clear that $S(f) \subset \Gamma^1 \times \dots \times \Gamma^r$. We consider the i -th projection $pr_i : \Gamma^1 \times \dots \times \Gamma^r \rightarrow \Gamma^i$.

In the same way, if $J \subset I := \{1, \dots, r\}$ we denote by $f_J = \prod_{i \in J} f_i$ the quasi-ordinary polynomial consisting in the irreducible quasi-ordinary polynomials $f_i, i \in J$. It is also clear that for the projection $pr_J : \Gamma^1 \times \dots \times \Gamma^r \rightarrow \prod_{j \in J} \Gamma^j$ we have that $pr_J(S(f)) \subset S(f_J)$.

Proposition 0.0.27. Let $S(f)$ be the semigroup of the singularity $(S, 0)$ with equation f and Γ^i the semigroup of its i -th component. Then we have that,

$$pr_i(S(f)) = \Gamma^i.$$

Remark 0.3. With a similar argument as the previous one it is possible to prove that $pr_J(S(f)) = S(f_J)$ for any $J \subset I$.

Remark 0.4. Now we fix $i = 1$ and $j = 2, \dots, r$ and we consider $k(f_1, f_j)$ the order of coincidence between the irreducible components. Therefore, if we fix $k_m = \min\{k(f_1, f_j), 1 < j \leq r\}$ the supports of all the roots of all the components coincide when we intersect them with the set $\{\lambda \in \mathbb{Q}_n^d \mid \lambda \not\geq k_m\}$.

This means that the semigroup $S(f) \subset \Gamma^1 \times \dots \times \Gamma^r$ it is in the diagonal until we achieve k_m , i.e., all the coordinates (understanding as coordinates its projections in Γ^i) are the same until the value is k_m .

For each index $i = 1, \dots, r$ we denote by S_i the semigroup of $f_{I-\{i\}} = f/f_i$

Definition 0.0.28. We say that the element $m \in S_i$ has **infinite fibre** if exists $\gamma \in \Gamma^i$ such that

$$\{\gamma' \in \Gamma^i \mid \gamma' \geq \gamma\} \subset pr_i((pr_{I-\{i\}})^{-1}(m)) .$$

Notice that in the definition one can add the condition that the element is in the conductor of Γ^i . That is, the last condition is equivalent to say that exists an element $\beta \in \Gamma^i$ such that $\beta + M_+^i \subset pr_i((pr_{I-\{i\}})^{-1}(m))$, then β must be in the conductor of Γ^i .

For $i \in I$ we denote by $\xi^i \in S_i$ the result of evaluate the polynomial f_i , i.e., if $j \neq i$ then $\xi_j^i = v_j(f_i)$.

Proposition 0.0.29. The element $\xi^i \in S_i$ has infinite fibre. Moreover it is the less element of the semigroup S_i with infinite fibre.

Theorem 0.0.30. The semigroup $S(f)$ allow us recover the semigroups of each irreducible component: $\{\Gamma^i, i = 1 \dots, r\}$ and the orders of coincidence $k(f_i, f_j)$ between pairs of irreducible components.

Remark 0.5. The last Theorem tell us that with the semigroup we can recover the Eggers-Wall tree of f . In the next section we will prove that the conversely it is also true, i.e., the Eggers-Wall tree allow us to recover the semigroup $S(f)$ explicitly.

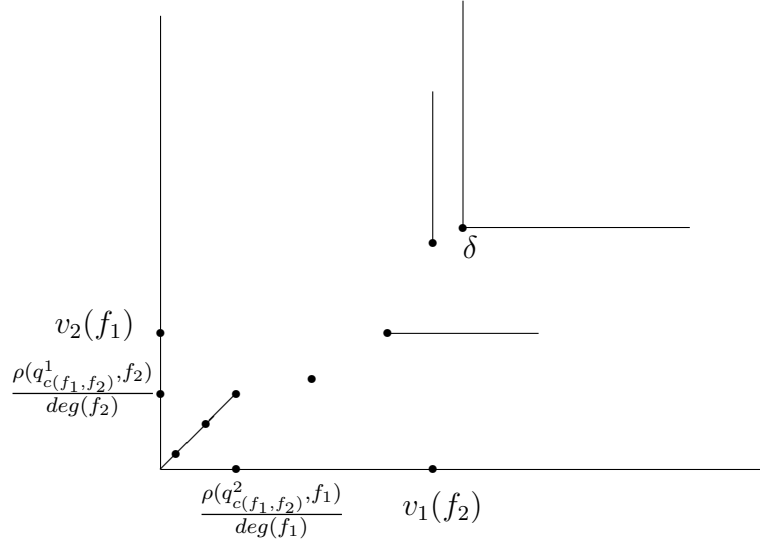
Definition 0.0.31. We say that an element $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r) \in S(f)$ is a **conductor** if

$$\{\gamma \in S(f) \mid \gamma > \delta\} = \{\gamma \in S(f_1) \times \dots \times S(f_r) \mid \gamma_i \geq \delta_i, i = 1, \dots, r\}.$$

The **conductor set** consist in all the conductors of $S(f)$.

Proposition 0.0.32. Exists a conductor δ in $S(f)$.

We have given a nice properties of the semigroup. Following these properties we draw a picture giving us an idea of its behavior.



The semigroup is contained in a line while all the branches coincide, i.e., the behavior is like the one having only one irreducible component. After the roots become different, for each irreducible component appear an infinite fibre which allow us to recover the orders of coincidence between pairs of branches. Finally, there is a conductor δ from which on all the elements are in the semigroup.

Proposition 0.0.33. The semigroup of $S(f)$ verify the following properties:

- (P1) $0 \in S(f)$.
- (P2) If $\alpha, \beta \in S(f)$ then $\inf(\alpha, \beta) = (\min(\alpha_1, \beta_1), \dots, \min(\alpha_r, \beta_r)) \in S(f)$ if there exists $\min(\alpha_i, \beta_i) \forall i$.
- (P3) $S(f)$ has a conductor.

Remark 0.6. The next property is not verified, which is true for plane curves (see [32]):

- (P4) If exist $\alpha, \beta \in S(f)$ such that $\alpha_i = \beta_i$ for an index i , and $\alpha_j \leq \beta_j$ for the remainder indexes $j \neq i$, then exists $\gamma \in S(f)$ such that: $\gamma_j = \min(\alpha_j, \beta_j)$ if $j \neq i$ and $\gamma_i \geq \alpha_i = \beta_i$.

The Generators of the Semigroup

This section it is devoted to the computation of a system of generators of the semigroup of a quasi-ordinary hypersurface singularity non necessary irreducible. To achieve this goal we give first a set of generators (not minimal) for the irreducible case which provide us a natural way of extension to the reducible one .

For the moment let f be the equation of an irreducible quasi-ordinary hypersurface singularity $(S, 0)$, $\zeta = \sum_{\lambda} a_{\lambda} \underline{X}^{\lambda} \in R_{d,n}$ a root of f , $\lambda_1 < \dots < \lambda_g$ the sequence of characteristic exponents of f . For each $i = 0, 1, \dots, g$ we consider $C_i = \{q \in \mathbb{Q}^d | \lambda_i \leq q \leq \lambda_{i+1}\}$ (we suppose that $\lambda_0 = 0$ and $\lambda_{g+1} = \infty$). Remember that, from the Lemma 0.0.7, the set of posible orders of coincidence $k(f, h)$ when h is rationally comparable with f it is contained in the set $C = \bigcup_{i=0}^g C_i$.

Let $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0}^d \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^d$ be the map defined by $\psi(\underline{y}, z) \mapsto \frac{1}{z} \underline{y}$.

Proposition 0.0.34. Consider $\alpha^i \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{d+1}$, $q^i = \psi(\alpha^i) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d$ for $i = 1, \dots, l$. Let $P = \text{Envol}(q^1, \dots, q^l)$ be the convex hull of the set $\{q^1, \dots, q^l\}$. Then $\psi^{-1}(P)$ is the convex polyhedral cone generated by $\{\alpha^1, \dots, \alpha^l\}$, $C(P) = \langle \alpha^1, \dots, \alpha^l \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$.

One of the objects we use everywhere are the curvettes which we define now.

Definition 0.0.35. Let f be the equation of an irreducible quasi-ordinary hypersurface singularity with characteristic exponents $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ with root $\zeta = \sum a_{\lambda} \underline{X}^{\lambda}$. Once we fix a element $\delta \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^d$, we say that $h^{(\delta)}$ is a **curvette** at δ if $h^{(\delta)}$ is the minimal polynomial of the fractionary power series $\zeta^{(q)} = \sum_{\lambda \neq \delta} a_{\lambda} \underline{X}^{\lambda} + b_{\delta} \underline{X}^{\delta}$ where $b_{\delta} \neq 0$, b_{δ} is any coefficient such that $k(f, h^{(\delta)}) = \delta$.

Notice that $h^{(\delta)}$ is an irreducible quasi-ordinary polynomial, $\zeta^{(\delta)}$ is a root of $h^{(\delta)}$ and moreover $k(f, h^{(\delta)}) = k(\zeta, \zeta^{(\delta)}) = \delta$. The condition $k(f, h^{(\delta)}) = \delta$ is equivalent to say that the coefficient b_{δ} does not coincide with the coefficient of \underline{X}^{δ} of ζ or any of the conjugated roots of ζ . It is clear that the root $\zeta^{(\delta)}$ may be defined from the truncation ζ^{δ} of ζ as $\zeta^{(\delta)} = \zeta^{\delta} + b \underline{X}^{\delta}$, where $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ is a generic element.

If we have that $\lambda_i < \delta \leq \lambda_{i+1}$ then the quasi-ordinary hypersurface $h^{(\delta)}$ has as sequence of characteristic exponents $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ plus δ , whenever $\delta \notin M_i$. We denote by N_{δ} the degree of $h^{(\delta)}$, notice that $N_{\delta} = n_1 \dots n_i n_{\delta}$ with $n_{\delta} = 1$ if and only if $\delta \in M_i$. Moreover we have that the integer n_{δ} is

characterized by the condition:

$$n_\delta = \min\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \ell\delta \in M_i\} .$$

Similar for the characterization of N_δ :

$$N_\delta = \min\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \ell\delta \in n_1 \cdots n_i M_i\} .$$

The integer n_δ allow us to give a section of the map ψ restricted to C_i :

$$\begin{aligned} \varphi : C_i &\rightarrow M_i \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}^{d+1} \\ \delta &\mapsto (n_\delta \cdot \delta, n_\delta) \end{aligned}$$

More general, we denote by L_i the subgroup of \mathbb{Q}^{d+1} , $L_i := M_i \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}^{d+1}$ and given $q \in \mathbb{Q}^d$ let n_q be the less positive integer such that $n_q \cdot q \in M_i$. Then we define

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q}^d &\rightarrow M_i \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \subset \mathbb{Q}^{d+1} \\ \delta &\mapsto (n_\delta \cdot \delta, n_\delta) \end{aligned}$$

The next result clarify the relation between the truncations and the curvettes.

Lemma 0.0.36. Consider $h \in \hat{C}_f$, suppose that $\delta = k(f, h) \in C_i$, $\delta \neq \lambda_i, \lambda_{i+1}$ and let h^δ be the truncation of h at δ . Then exists an integer $k \geq 0$ such that:

1. $\deg(h) = k \deg(h^\delta) = kn_1 \cdots n_i n_\delta$
2. $v(h) = kv(h^\delta) = k \cdot n_\delta \cdot (\delta - \lambda_i + n_i \gamma_i)$

Remark 0.7. Observe that if we have $\delta = k(f, h) = \lambda_i$, with the notations of the previous lemma, may occurs two cases. If $b_{\lambda_i} = 0$ then h^δ is an i -semi root of f and we have that $\deg(h^\delta) = n_1 \cdots n_{i-1}$ and $v(h^\delta) = \gamma_i$. If $b_{\lambda_i} \neq 0$ then h^δ is a curvette in λ_i and we have that $\deg(h^\delta) = n_1 \cdots n_i$, $v(h^\delta) = n_i \gamma_i$. For the case $k(f, h) = \lambda_{i+1}$ we have the same possibilities.

The following result is interesting (but not essential) for our purpose, which is to prove that the values given by the polynomials $h \in \hat{C}_f$ with $\lambda_i < k(f, h) < \lambda_{i+1}$ may be achieved from a finite number of them. From the Lemma 0.0.36 we already know that we can restrict to the case in which $h = h^{(q)}$ is a curvette. The next proposition tell us in which conditions the value $v(h^{(q)})$ is the sum of the values of other curvettes $v(h^{(q_1)})$, $v(h^{(q_2)})$, where $q_1, q_2, q \in C_i$.

Definition 0.0.37. Given $q_1, q_2 \in C_i$ we denote by $q_1 * q_2 \in C_i$ the element $q_1 * q_2 := \psi(\varphi(q_1) + \varphi(q_2))$ and we call it the **Farey sum** of q_1 and q_2 relative to φ .

Remark 0.8. The Farey sum of two rational numbers $q_1 = a/b, q_2 = c/d$ written in the irreducible form is the rational number $\frac{a+c}{b+d}$. Observe that the case $d = 1$ and $M_i = \mathbb{Z}$ (using the notations of the definitions) we have that $\varphi(q_1) = (a, b)$, $\varphi(q_2) = (c, d)$ and $q_1 * q_2$ is the Farey sum in classical sense. Thus we can understand the above definition as a generalization of this concept relative to the lattice M_i and considering the d -tuples of rational numbers with a common denominator for every coordinate.

In some sense we could consider more natural the section of ψ defined from the degree of $h^{(\delta)}$, $\deg(h^{(\delta)}) = N_\delta$:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q}_{\geq 0}^d &\rightarrow n_1 \cdots n_i M_i \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1} \\ \delta &\mapsto (N_\delta \cdot \delta, N_\delta) \end{aligned}$$

If $q_1, q_2 \in C_i$ it is easy to prove that $q_1 * q_2 = \psi(\phi(q_1) + \phi(q_2))$. Therefore there is no difference between considering one or other section in the definition. In such a case, observe that $r_i = N_{q_i} q_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ for $i = 1, 2$ and we have that

$$q_1 * q_2 = \frac{r_1}{N_{q_1}} * \frac{r_2}{N_{q_2}} = \frac{r_1 + r_2}{N_{q_1} + N_{q_2}}.$$

Lemma 0.0.38. Let $q_1, q_2 \in C_i$ and $q = q_1 * q_2$ its Farey sum relative to φ . Then there exists an integer $k \geq 1$ such that $\varphi(q_1) + \varphi(q_2) = k\varphi(q)$.

The last lemma may also be described in terms of the degrees and the map ϕ , i.e., we have that $\phi(q_1) + \phi(q_2) = k\phi(q)$, in particular, $\deg(h^{(q_1)}) + \deg(h^{(q_2)}) = k \cdot \deg(h^{(q)})$.

Proposition 0.0.39. Let f be the equation of an irreducible quasi-ordinary hypersurface with characteristic exponents $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ and root $\zeta = \sum a_\lambda X^\lambda$. Consider $q_1, q_2 \in C_i \subset \mathbb{Q}^d$ and h_1, h_2 curvettes at q_1 and q_2 respectively, and let h be a curvette at $q = q_1 * q_2$. Then are equivalent:

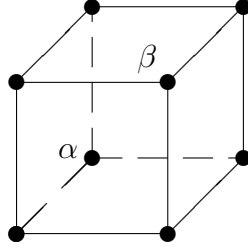
1. $v(h) = v(h_1) + v(h_2)$.
2. $\varphi(q) = \varphi(q_1) + \varphi(q_2)$
3. $\deg(h) = \deg(h_1) + \deg(h_2)$.

This result it is easy generalized in the following way.

Corollary 0.0.40. Consider f , $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_g$ and $\zeta = \sum a_\lambda \underline{X}^\lambda$ as in the last proposition. Let $q_1, \dots, q_t \in C_i \subset \mathbb{Q}^d$, and for $j = 1, \dots, t$ let h_j be a curvette at q_j and h a curvette at $q = q_1 * \dots * q_t = \psi(\sum \varphi(q_i))$. Then are equivalent

1. $v(h_q) = \sum_{j=1}^t v(h_{q_j})$.
2. $\varphi(q) = \sum_{j=1}^t \varphi(q_j)$.
3. $\deg(h) = \sum_{j=1}^t \deg(h_j)$.

Given $J \subset I = \{1, \dots, d\}$ and $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^d$ we denote by μ^J the d -tuple $\mu^J = \sum_{i \in J} \mu_i e_i$. That is, for the i -th coordinate of μ^J we have that $\mu_i^J = \mu_i$ if $i \in J$ and $\mu_i^J = 0$ if $i \notin J$. Consider $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^d$ with $\alpha < \beta$. We denote by $C[\alpha, \beta]$ the convex hull of the set $C_{\alpha, \beta} := \{\alpha + (\beta - \alpha)^J \mid J \subset I\}$. Notice that $C[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ is the hypercube with vertices the points $\alpha + (\beta - \alpha)^J$, $J \subset I$. For example, in dimension 3 are the 8 vertices of the cube:



Consider $i \in \{1, \dots, g\}$ and $\lambda_i < \lambda_{i+1}$. We have that $C_i = C[\lambda_i, \lambda_{i+1}] \cap \mathbb{Q}^d$, for $J \subset I$ we denote by $E^J = \lambda_i + (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^J$, therefore the set of vertices $C_{\lambda_i, \lambda_{i+1}} = \{E^J \mid J \subset I\}$. Moreover we denote by $n_J = n_{E^J}$ the less positive integer such that $n_J \cdot E^J \in M_i$, thus $\varphi(E^J) = (n_J \cdot E^J, n_J) \in L_i$. We denote by S_i the subsemigroup of $L_i \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}^{d+1}$ generated by the elements $\varphi(E^J)$, $J \subset I$, i.e.,

$$S(C_i) := \langle \{(n_J \cdot E^J, n_J) \mid J \subset I\} \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} = \sum_{J \subset I} \mathbb{Z}_{\geq 0} (n_J \cdot E^J, n_J) .$$

We also denote by $C(C_i) = \psi^{-1}(C[\lambda_i, \lambda_{i+1}])$. Observe that by Proposition 0.0.34 we have that $C(C_i)$ is the convex cone generated by the vectors $\varphi(E^J)$,

$J \subset I$:

$$C(C_i) = \langle \{(n_J \cdot E^J, n_J) \mid J \subset I\} \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = \sum_{J \subset I} \mathbb{R}_{\geq 0} (n_J \cdot E^J, n_J).$$

For $i < g$, the integer closure of the semigroup $S(C_i)$ in the lattice L_i , $(\overline{S(C_i)})_{L_i}$, is the set of elements $x \in L_i$ such that $nx \in S(C_i)$ for one $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Lemma 0.0.41. With the previous notations we have that:

1. $C(C_i) \cap L_i = (\overline{S_i})_{L_i}$.
2. The elements of the set $\{\varphi(q) \mid q \in C_i\} \subset C(C_i) \cap L_i$ are the primitive elements of the semigroup.
3. $C(C_i) \cap L_i$ is a finitely generated semigroup. A set of generators is given by

$$\{\varphi(\delta) = (n_\delta \cdot \delta, n_\delta) \mid \delta \in C_i \text{ y } n_\delta < \sum_{J \subset I} n_J\}.$$

Let $\underline{z} \in M_i^+ = M_i \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}^d$. The lineal isomorphism $\rho_{\underline{z}} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ defined by $\rho_{\underline{z}}(\underline{x}, n) = (\underline{x} + n\underline{z}, n)$ induce an isomorphism of lattices $\rho_{\underline{z}} : L_i \rightarrow L_i$. Consider $\alpha^1, \dots, \alpha^t \in L_i \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}^{d+1}$ and $C := \langle \alpha^1, \dots, \alpha^t \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ the convex poliheral cone generated by them. The map $\rho_{\underline{z}}$ induce an isomorphism between the saturated semigroups : $C \cap L_i \simeq \rho_{\underline{z}}(C) \cap L_i$.

Let $\underline{z} = n_i \gamma_i - \lambda_i \in M_i^+$, we move the hypercube $C[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ with \underline{z} , i.e., we consider $VC_i := C_i + \underline{z} = (C[\lambda_i, \lambda_{i+1}] + \underline{z}) \cap \mathbb{Q}^d$. Is clear that the cone $C(VC_i)$ is the image of the cone $C(C_i)$ by $\rho_{\underline{z}}$ and therefore the semigroups $C(C_i) \cap L_i$ and $W_i = C(VC_i) \cap L_i$ are isomorphism through $\rho_{\underline{z}}$.

Let A_i be the set of irreducible monic polynomials $h \in R_d[Y]$ which are rationally comparable with f and such that

1. $k(f, h) \in C_i$.
2. h it is not an i -semi root or a $i + 1$ -semi root.

We denote by $V_i = \{v(h) \mid h \in A_i\} \subset \Gamma$.

Proposition 0.0.42. For $i < g$, the set V_i is a subsemigroup of Γ finitely generated. In fact V_i is the image if the semigroup $W_i = C(VC_i) \cap L_i$ by the natural projection.

As a consequence, a set of generators of V_i are the values of the curvettes $v(h^{(\delta)})$, where $\delta \in C_i$ and $n_\delta < \sum_{J \subset I} n_J$.

The next result allow us to reduce the set of generators of the semigroup V_i .

Theorem 0.0.43. For $i < g$, the set V_i it is a finitely generated semigroup. A set of generators consist in the set

$$H'_i := \{v(h^{(\delta)}) \mid \delta \in C_i \text{ y } n_\delta \leq \max\{n_J + n_K \mid J, K \subset I\}\} .$$

For the case $i = g$ the previous results are not true because $\lambda_{g+1} \notin \mathbb{Q}^d$. We need a previous result to analyze the behavior in this case, but that it is also interesting in the other cases ($i \neq g$).

Proposition 0.0.44. Consider $i \leq g$ and $q^1, \dots, q^r \subset C_i \cap M_i$. Let $P := \text{Envol}(q^1, \dots, q^r)$ be the convex hull of q^1, \dots, q^r and $C(P) = \psi^{-1}(P)$ the associated cone. Then the semigroup $C(P) \cap L_i$ it is generated by

$$\{\varphi(\delta) = (n_\delta \delta, n_\delta) \mid \delta \in P \text{ y } n_\delta \leq d - 1\} .$$

In particular, if we are in the case of quasi-ordinary surfaces; i.e., $d = 2$ we have that $\{\varphi(q) = (q, 1) \mid q \in P \cap M_i\}$ is a set of generators.

Corollary 0.0.45. The semigroup $C(C_g) \cap L_g$ is generated by the set $\{\varphi(\delta) = (\delta, 1) \mid \delta \in C_g \cap M_g\}$. The set V_g is a subsemigroup of Γ generated by $H'_g := \{v(h^{(\delta)}) \mid \delta \in C_g \cap M_g\}$.

Remark 0.9. Notice that the set H'_g is infinite, on the other hand the semigroup V_g consist in the elements of the form $n_g \gamma_g + \delta$ with $\delta \in M_g^+$; that is, is $V_g = n_g \gamma_g + M_g^+$.

Let $i \in I$. We modify the sets H'_i described before as follows:

$$H_i := \{\gamma_i\} \cup H'_i \setminus \{n_i \gamma_i, n_{i+1} \gamma_{i+1}\} .$$

Observe that from the point of view of the generators of the semigroup of Γ is crucial to consider the minimal set of generators $\gamma_1, \dots, \gamma_g$.

Is clear that $H = \bigcup_{i \geq 0} H_i$ is a set of generators of the semigroup Γ (contains a minimal system of generators). But contains another kind of information necessary if we have several irreducible components.

Let $\hat{\Gamma} := \{w(h) := (v(h), \deg(h)) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Z} \mid h \in \hat{C}_f\}$ be the extension of the semigroup Γ consisting in add the degree of the polynomials $h \in R_r[Y]$. For $i = 0, \dots, g$ let \hat{H}'_i be the corresponding extension of the set H'_i and \hat{H}_i the one of H_i . Observe that, if $\lambda_i < \delta < \lambda_{i+1}$ the degree of $h^{(\delta)}$ is $n_1 \cdots n_i \cdot n_\delta$, we denote it as $\deg \delta$, with this notation we have that $\deg(\lambda_i) = n_1 \cdots n_{i-1}$.

Theorem 0.0.46. The semigroup $\hat{\Gamma}$ it is generated by $\hat{H} := \bigcup_{i \geq 0} \hat{H}_i$.

Let $f = \prod_{i=1}^r f_i$ be a quasi-ordinary hypersurface with r irreducible components. For each $i = 1, \dots, r$ we consider the set of orders of coincidence of the different roots of f with a fix root ζ of f_i ; i.e., the set $\{\lambda_j^i\}_{j=1}^{g_i} \cup \{k(f_i, f_j)\}_{j \neq i}$. We know that the last set it is totally ordered, therefore we may write as

$$G_i := \{0 = \beta_0^i < \beta_1^i < \beta_2^i < \dots < \beta_{s_i}^i\} = \{\lambda_j^i\}_{j=1}^{g_i} \cup \{k(f_i, f_j)\}_{j \neq i}.$$

For $j = 0, \dots, s_i$, extending the previous constructions and definitions:

1. $N_j^i := \langle \beta_1^i, \dots, \beta_j^i \rangle_{\mathbb{Z}}$ the subgroup of \mathbb{Q}^d generated by $\beta_1^i, \dots, \beta_j^i$.
2. $D_j^i := C[\beta_j^i, \beta_{j+1}^i] \cap \mathbb{Q}^d$
3. $D_{\beta_j^i, \beta_{j+1}^i}$ the set of vertices of the hypercube with vertices β_j^i, β_{j+1}^i ; i.e.: $\{\beta_j^i + (\beta_{j+1}^i - \beta_j^i)^J \mid J \subset I\}$.
4. For each $\delta \in D_j^i$, $n_\delta := \min\{l \mid l \cdot \delta \in N_j^i\}$. In particular $n[j]_J$ is the correspondent to the vertex $\beta_j^i + (\beta_{j+1}^i - \beta_j^i)^J$. We call $n[j] := \max\{n[j]_J + n[j]_K \mid J, K \subset I\}$.
5. $K_j^i := \{\delta \in D_j^i \mid n_\delta \leq n[j]\}$.
6. $H_j^i := \{v(h^\delta) \mid \delta \in K_j^i\}$.

Notice that if we take the curvette with respect to $f_i, h^{(\delta)}, \delta \in D_j^i$, we have that $h^{(\delta)}$ is comparable with f and moreover $k(f, h) = k(f_i, h) \geq k(f_j, h)$ for $j \neq i$. Therefore has sense the set defined before.

Lemma 0.0.47. Consider $h \in \hat{C}_f$ and suppose that $k(f, h) = k(f_i, h)$. Then $k(f, h) \in D_j^i$ existing $j = 0, 1, \dots, s_i$.

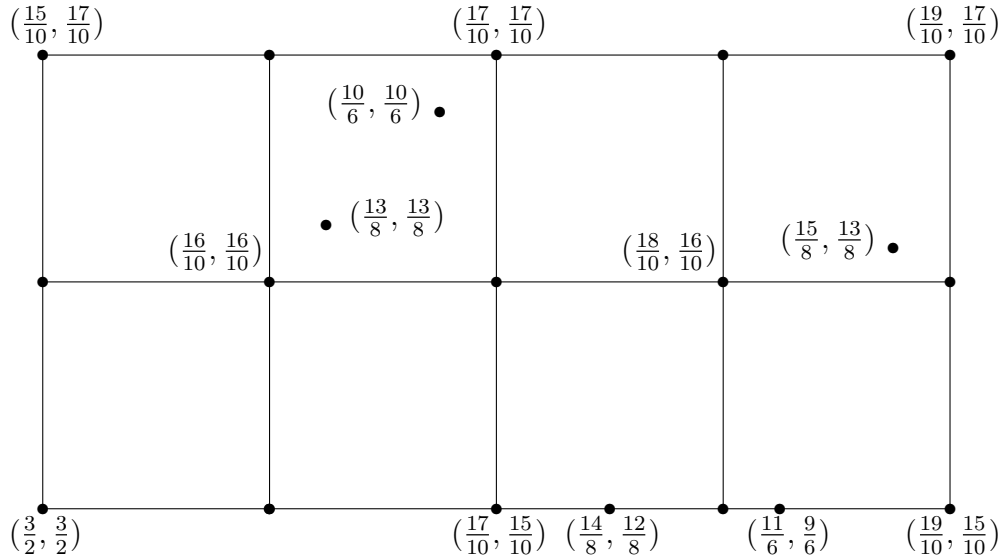
Lemma 0.0.48. Let $q_1, q_2 \in D_j^i$. Let h_1, h_2 and h be curvettes of f_i at q_1, q_2 and $q = q_1 * q_2$ respectively. Then are equivalent:

1. $v(h) = v(h_1) + v(h_2)$.
2. $v_i(h) = v_i(h_1) + v_i(h_2)$.
3. $\deg(h_1) + \deg(h_2) = \deg(h)$.

Theorem 0.0.49. The set $H := \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=1}^{s_i} H_j^i$ is a set of generators of the semigroup $S(f)$. More concrete, let $h \in \hat{C}_f$ be irreducible and suppose that $k(f, h) = k(f_i, h) \in D_j^i$. Then $v(h)$ is sum of elements in H_j^i .

We frequently identify the set of generators described in the Theorem 0.0.49 with the set of points which provide us the curvettes where we have to evaluate, i.e., we identify H_j^i with K_j^i for all i, j .

Example 0.3. We consider the quasi-ordinary hypersurface with characteristic exponents $\lambda_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ and $\lambda_2 = (\frac{19}{10}, \frac{17}{10})$. In the next picture we draw the points $\delta \in C[\lambda_1, \lambda_2] \cap \mathbb{Q}^d$ such that the curvette h_δ at δ verify that $n_\delta \leq 5$.



The Theorem 0.0.49 say that we should take K_1^1 which consist in those elements such that $n_\delta \leq 10$.

It is not difficult to see that between the points with $n_\delta \leq 5$ the unique generators are $\{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{10}{6}, \frac{10}{6}), (\frac{11}{6}, \frac{9}{6}), (\frac{15}{8}, \frac{13}{8}), (\frac{19}{10}, \frac{15}{10}), (\frac{15}{10}, \frac{17}{10}), (\frac{17}{10}, \frac{17}{10}), (\frac{19}{10}, \frac{17}{10})\}$. One can check that the rest of the elements with $6 \leq n_\delta \leq 10$ are also generated by the previous ones, thus there are no more generators in C_1 .

Given i, j is clear that the trees G_i and G_j coincide until the point $k(f_i, f_j)$, i.e., if we have that $k(f_i, f_j) = \beta_t^i = \beta_l^j$ then $t = l$ and $\beta_k^i = \beta_k^j$ for $k \leq t$. We identify both trees from the 0 till $k(f_i, f_j)$ and repeating this process with the other trees at the end we get the tree G_f which codify all the information of the characteristic exponents of each irreducible component and the orders of coincidence between different branches. The tree we

have described is the **Eggers-Wall tree** of f if we add, for each $i = 1, \dots, r$ a point which it is joined to the last point of G_i with label ∞ , this point is to distinguish the irreducible components, because may happen that all the branches of the tree go together until the end in which case we can not know how many components have. For symmetry with dual graph, we will denote to this point with an arrow instead that with a point labelled with infinity.

We moreover add, in each segment $[\beta_j^i, \beta_{j+1}^i]$, a label of the set K_j^i of the values in the curvettes h^δ relative to f_i with order of coincidence $\delta \in C[\beta_j^i, \beta_{j+1}^i] \cap \mathbb{Q}^d$ y $n_\delta \leq n[j]$.

The set of generators described in Theorem 0.0.49 and the Eggers-Wall tree generalize in some sense the set of generators described in [19] and the dual graph from the case of plane curves. The difference is that in the case of plane curves the dual graph it is obtained from the minimal resolution which allow to compute a minimal system of generators, in our case this it is not possible (there is no a minimal resolution) we can only give a bound. In [19] there is also a good idea, consisting in describe the generators of the semigroup through the dual graph, which has motivated us to make a similar develop, whenever is possible.

We consider that is interesting to the result of [19] in order to see the symmetry with our case.

We suppose for the moment that f is a plane curve singularity. Let A_f be the dual graph or resolution graph. For each vertex $\alpha \in A_f$ we denote by $w(\alpha)$ the number of vertices in A_f that are joined with α . Those vertices $\alpha \in A_f$ that verify: $w(\alpha) = 2$ are called ordinary, $w(\alpha) \geq 3$ are called star points and if $w(\alpha) = 1$ are called end points. Let ε be the set of end points together with $\underline{0}$, since it is possible that $n(\underline{0}) \neq 1$. An arc in A_f is a sequence of ordinary points except the extremes. When one of the extremes is an end point we say that it is a **dead arc**, we denote by \mathcal{D} the set of dead arc of A_f . Let $B \in \mathcal{D}$ be the dead arc with extremes ρ_B the end point and σ_B the star point. Observe that $\varepsilon = \{\rho_B\}_{B \in \mathcal{D}} \cup \{\underline{0}\}$. For each irreducible component we denote by Υ_i the geodesic that join the first point $\underline{0}$ with the point of higher weight, α_i , that is the last point that apport the i -th component to A_f .

Theorem 0.0.50 (Theorem 2, [19]).

The minimal set of generators of the semigroup of f consist in the set of values in the curvettes at the points:

$$\alpha \in \varepsilon \cup \left(\bigcup_{i=1}^r \Upsilon_i - \bigcap_{i=1}^r \Upsilon_i - \{\sigma_B : B \in \mathcal{D}\} \right)$$

plus the infinite set of values $v(h^{\alpha_i}) + (0, \dots, k, \dots, 0)$, where k it is in the

i -th place, for $i = 1, \dots, r$.

Now we give an algorithm for an irreducible quasi-ordinary hypersurface singularity which uses the results already described, with the purpose of giving a system of generators, not minimal in the irreducible case but no so far from be minimal in the reducible case.

Algorithm 0.1. Let $(S, 0)$ be an irreducible quasi-ordinary hypersurface singularity. Let $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ be its characteristic exponents.

- **First exponent:** we denote by $\underline{0} := (0, \dots, 0)$ and by $n_1 = \deg(h_{\lambda_1})$. Consider $M_0 = \mathbb{Z}^d$ and $M_1 = \mathbb{Z}^d + \mathbb{Z}\lambda_1$. Let $E_1^0 = \underline{0}, \dots, E_{2^d}^0 = \lambda_1$ be the elements of the set $C_{\underline{0}, \lambda_1}$ with degrees $N_0 = 1, N_1, \dots, N_{2^d} = n_1$ respectively. Let $n[0] = \max\{N_i + N_j : i, j \in \{1, \dots, 2^d\}\}$. We compute $K_0 = \{\delta \in C_0 \mid n_\delta \leq n[0]\}$.

In order to represent it we draw a point for the origin with label $\underline{0}$, we join it to other point with label K_0 which represent the set of points, in order to remark this fact we draw a square instead of a point, we join the square with another points with label λ_1 . Finally for the first characteristic exponents, and in order to be symmetric to the case of plane curves, we draw a point joined to λ_1 with label $q > \lambda_1$ and $q \in M_0$ (any), which is a 0-semi root of f .

- **Exponent $(j - 1) \rightarrow j$:** Suppose that we have done all the first $(j - 1)$ exponents, i.e., for $k = 1, \dots, j - 1$ we have computed the sets H_k and are represented in the graph with and square joined by to segments to λ_{k-1} and λ_k respectively. We have also drawn a point of $M_{k-1} \cap C_k$ joined to λ_k representing a $k - 1$ -semi root of f .

- **Exponente j -ésimo:** The current lattice is $M_j = \mathbb{Z}^d + \langle \lambda_1, \dots, \lambda_j \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ and the hypercube where we are working is C_j . We consider the vertices of $C_{\lambda_{j-1}, \lambda_j}$ which are $E_1^j = \lambda_{j-1}, \dots, E_{2^d}^j = \lambda_j$ such that $n_{E_k^j} = N_k^j$ for $k = 1, \dots, 2^d$. Let $n[j] = \max\{N_k^j - N_{k'}^j \mid k, k' \in \{1, \dots, 2^d\}\}$, we compute $K_j = \{\delta \in C_j \mid n_\delta \leq n[j]\}$.

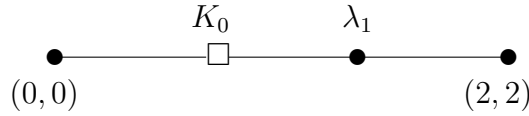
We start drawing from λ_{j-1} a new segment joined to K_j , represented by a square, we also join the square with a point labelled by λ_j . Finally we draw a point joined to λ_j which is in $M_j \cap C_{j+1}$, representing a $j - 1$ -semi root of f , we give it as a label any q with $n_q = n_j$. The last point is a dead arc.

After $g - 1$ steps corresponding to C_0, \dots, C_{g-1} we have finished, since every curvette at a point of $q \in C_g = A_g$ is a multiple of a curvette at $q \in C_g \cap M_{g-1}$ which is already represented in the graph.

Example 0.4. Let f be the equation of an irreducible quasi-ordinary singularity with root $\xi = X_1^{3/2} X_2^{3/2} + X_1^{7/4} X_2^{7/4}$.

The first characteristic exponents is $\lambda_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$. We consider the lattice $M_0 = \mathbb{Z}^2$ and the set $C_{0,\lambda_1} = \{0, (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{0}{2}), (\frac{0}{2}, \frac{3}{2})\}$. Then $n[0] = 4$ and $K_0 = \{(0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\} \cup \{(\frac{3}{2}, \frac{0}{2}), (\frac{0}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})\} \cup \{(\frac{5}{4}, \frac{0}{4}), (\frac{5}{4}, \frac{5}{4}), (\frac{0}{4}, \frac{5}{4}), (\frac{4}{3}, \frac{0}{3}), (\frac{0}{3}, \frac{4}{3}), (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})\}$ although one can easily check that the last set it is not necessary.

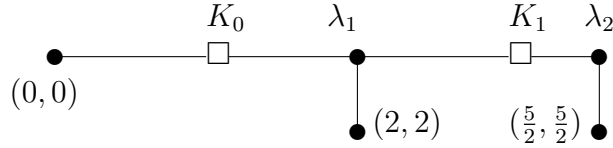
Thus the first piece of graph is:



The second characteristic exponents is $\lambda_2 = (\frac{7}{4}, \frac{7}{4})$ and

$$C_{\lambda_1, \lambda_2} = \{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{14}{8}, \frac{12}{8}), (\frac{12}{8}, \frac{14}{8}), (\frac{7}{4}, \frac{7}{4})\}.$$

Since $M_1 = \mathbb{Z}^2 + \lambda_1\mathbb{Z}$ is clear that $n[1] = 6$ and that $K_1 = C_{\lambda_1, \lambda_2} \cup \{(\frac{17}{10}, \frac{15}{10}), (\frac{15}{10}, \frac{15}{10}), (\frac{15}{10}, \frac{17}{10}), (\frac{20}{12}, \frac{18}{12}), (\frac{18}{12}, \frac{20}{12}), (\frac{20}{12}, \frac{20}{12})\}$. One can again check that the last set it is not necessary.



As indicate the theorem 0.049 the values in the elements $\bigcup_{j=1}^{g_i-1} HK_{j=1}^{g_i-1}$ are the generators for each irreducible component ($i = 1, \dots, r$). Now, the idea is to "glue" the information given by all the irreducible components. For the reducible case we have to consider the information coming from all the irreducible components, and put all together in the graph taking on account the orders of coincidence of the different branches.

Algorithm 0.2. Let $(S, 0)$ be a quasi-ordinary hypersurface singularity with r irreducible components. Let $\lambda_1^i, \dots, \lambda_{g_i}^i$ be the characteristic exponents of the i -th component and let $k(f_i, f_j)$, $j \neq i$, the orders of coincidence of the i -th components with the other ones. We denote by $G_i := \{0 = \beta_0^i < \beta_1^i < \beta_2^i < \dots < \beta_{s_i}^i\} = \{\lambda_j^i\}_{j=1}^{g_i} \cup \{k(f_i, f_j)\}_{j \neq i}$. An important remark is that if β_j^i is an order of coincidence which is not a characteristic exponent, then in the hypercube defined by β_j^i, β_{j+1}^i the lattice is the same as the one in β_{j-1}^i, β_j^i since we are still in $D_j^i = C[s_{j-1}^i, s_{j+1}^i] \cap \mathbb{Q}^d$.

(I) First Irreducible component.

We apply the Algorithm 0.1 to G_1 , in such a way that the orders of coincidence play the same role as the characteristic exponents, but with two important changes. If we have an order of coincidence we do not draw a dead arc. Moreover, if $\delta \in G_1$ is the first order of coincidence that appear in G_1 , we do not give labels to the segments joining to consecutive points in $a, b \in G_1$ with $a, b \leq \delta$. As we already said in Remark 0.4, for the common part of all the branches, the values in the curvettes $\lambda \not\geq \delta$ behaves like the semigroup of the irreducible component h_δ with root the truncation at δ . Thus the only generators in the common part are the values in the semi roots of h_δ . Finally we add an arrow to the last point $\alpha^1 \in G_1$, in this way we indicate that is a irreducible component and we can construct the set $K_{s_1}^1 = \{\alpha \in M_{g_1} \mid \alpha \geq \alpha^1\}$. We call to the resulting graph F_1 .

(II) Successive irreducible components.

For each $i = 2, \dots, r$ we denote by F_{i-1} the graph with labels obtained after add the information given by the set G_j of f_j for $j < i$. Suppose that we have done the step $i - 1$, let F_i be the current graph which we initialize to $F_i := F_{i-1}$. We have to include the information given by the components f_i depending on the contact $k_{f_i} = \max\{k(f_i, f_j) \mid j < i\}$ of the i -th component with the hypersurface $f_1 \cdots f_{i-1}$. We may suppose that $k_{f_i} = k(f_i, f_1)$.

- (i) $k_{f_i} \neq \lambda_j^1$.

We know that k_{f_i} exist in the graph F_{i-1} (it is already drawn). Then we draw joined to k_{f_i} a new labelled graph F which it is computed following the Algorithm 0.1 until we finish the sequence of G_i , i.e., $\beta_k^i > k_{f_i}$. Thus $F_i := F_{i-1} \cup F$ joined as we have said.

- (ii) $k_{f_i} = \lambda_j^1$.

Let q be the point representing the dead arc joined to λ_j^1 . If k_{f_i} it is not a characteristic exponents of f_i we delete the dead arc. In both cases (when is a characteristic exponents and it is not) we situate in k_{f_i} . We develop the Algorithm 0.1 for the remainders terms of G_i , i.e., $\beta_k^i > k_{f_i}$. Then $F_i := F_{i-1} \cup F$.

At the end we have a graph $F_r = F_f$ containing all the information of the hypersurface. Only remains to remark in the graph the infinite sets $H_{s_i}^i$, which we describe in the Corollary 0.45. In order to do this, we put an arrow in those vertices α^i of F_f that are the last vertices that apport each irreducible component to the graph F_f , since $K_{s_i}^i = \{\alpha \in M_{g_i} \mid \alpha \geq \alpha^i\}$.

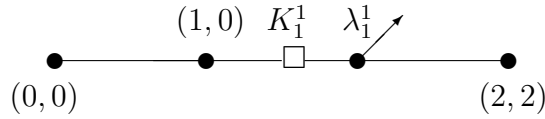
Is clear from the last algorithm that the Eggers-Wall tree is equivalent to the graph F_f . Therefore, we have the following theorem containing several results already described.

Teorema 0.0.1. *Let f be the equation of a quasi-ordinary hypersurface singularity. Are equivalent:*

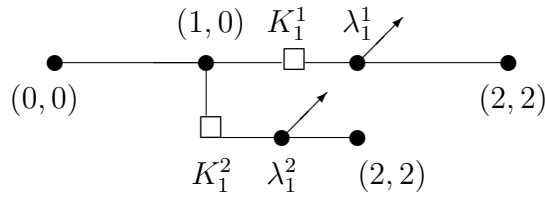
1. *The Eggers-Wall tree of f .*
2. *The graph obtained if we apply the Algorithm 0.2 to f .*
3. *The semigroup of f .*

Example 0.5. Let f be the equation of a quasi-ordinary hypersurface with two irreducible components, f_1 with root $\xi_1 = X_1^{3/2} X_2^{3/2}$ and f_2 with root $\xi_2 = \alpha X_1^1 + X_1^{3/2} X_2^{3/2}$ and $\alpha \neq 0$.

Taking on account that the order of coincidence is $k(f_1, f_2) = (1, 0)$, the graph of f_1 is,

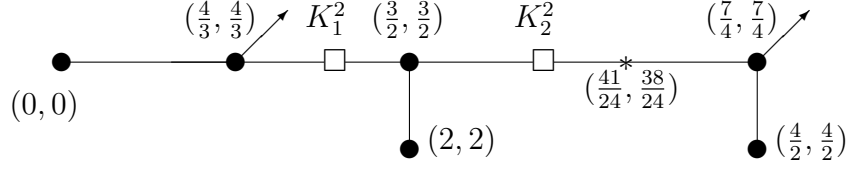


Where $K_0^1 = \{(0, 1)\}$ and $K_1^1 = \{(1, 1)\}$. This means that we are in the case (i) of the algorithm, therefore we get



Where $K_1^1 = K_1^2 = \{(1, 1)\}$.

Example 0.6. We consider the quasi-ordinary surface of equation $f = f_1 f_2$ and roots $\zeta_1 = X_1^{4/3} X_2^{4/3}$, $\zeta_2 = X_1^{6/4} X_2^{6/4} + X_1^{7/4} X_2^{7/4}$ respectively. Moreover we consider h with root $\zeta_h = X_1^{6/4} X_2^{6/4} + X_1^{41/24} X_2^{38/24}$. The output of the Algorithm 0.2 for f is,



Where $K_0^1 = \{(\frac{0}{3}, \frac{4}{3})(\frac{4}{3}, \frac{0}{3})\}$, $K_1^2 = \{(\frac{9}{6}, \frac{8}{6}), (\frac{8}{6}, \frac{9}{6})\}$ and $K_2^2 = \{(\frac{14}{8}, \frac{12}{8}), (\frac{12}{8}, \frac{14}{8})\}$. We compute the values in some of the points:

- $v(h_{(\frac{2}{1}, \frac{2}{1})}) = [(4/3, 4/3), (3/2, 3/2)]$.
- $v(h_{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}) = [(8/3, 8/3), (3, 3)]$.
- $v(h_{(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})}) = [(4, 4), (4, 4)]$.
- $v(h_{(\frac{4}{2}, \frac{4}{2})}) = [(8/3, 8/3), (13/4, 13/4)]$.
- $v(h_{(\frac{7}{4}, \frac{7}{4})}) = [(16/3, 16/3), (26/4, 26/4)]$.
- $v(h_{(\frac{6}{4}, \frac{7}{4})}) = [(\frac{32}{3}, \frac{32}{3}), (12, 13)]$.
- $v(h_{(\frac{7}{4}, \frac{6}{4})}) = [(\frac{32}{3}, \frac{32}{3}), (13, 12)]$.

We also compute the value of h :

$$[(h, f_1), (h, f_2)] = [(64, 64), (77, 74)].$$

From Theorem 0.0.49 we know that $(\frac{41}{24}, \frac{38}{24})$ may be achieved as a Farey sum of elements in $C_{a,b}$ with $a = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ and $b = (\frac{7}{4}, \frac{7}{4})$, although at the moment we do not have an algorithm that describe how. In this particular case it is not difficult to see that $(\frac{41}{24}, \frac{38}{24}) = 4(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) * 4(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}) * 3(\frac{7}{4}, \frac{6}{4})$. Therefore the value $v(h) = [(64, 64), (77, 74)]$ can be decomposed in terms of the values of the Farey sums. To check it, is enough to consider $4v(h_a) + 4v(h_b) = [(32, 32), (38, 38)]$ and $3v(h_{(\frac{7}{4}, \frac{6}{4})}) = [(32, 32), (39, 36)]$, where $[(32, 32), (38, 38)] + [(32, 32), (39, 36)] = [(64, 64), (77, 74)]$.

Summarize of Chapter 3

The main results of this Chapter are included essentially into the joint work with Pedro Daniel González Pérez with title, *Quasi ordinary singularities, essential divisors and Poincaré series*. Now I just reproduce the Abstract of this paper, for more information <http://arxiv.org/abs/0705.0603>.

We define Poincaré series associated to a toric or analytically irreducible quasi-ordinary hypersurface singularity, $(S, 0)$, by a finite sequence of monomial valuations, such that at least one of them is centered at the origin 0 . This involves the definition of a multi-graded ring associated to the analytic algebra of the singularity by the sequence of valuations. We prove that the Poincaré series is a rational function with integer coefficients, which can be defined also as an integral with respect of the Euler characteristic, over the projectivization of the analytic algebra of the singularity, of a function defined by the valuations. In particular, the Poincaré series associated to the set of divisorial valuations corresponding to the essential divisors, considered both over the singular locus and over the point 0 , is an analytic invariant of the singularity. In the quasi-ordinary hypersurface case we prove that this Poincaré series determines and it is determined by the normalized sequence of characteristic monomials. These monomials in the analytic case define a complete invariant of the embedded topological type of the hypersurface singularity.

Capítulo 1

Singularidades Casi-Ordinarias

Este capítulo está dedicado al estudio de las singularidades casi-ordinarias. Definimos los conceptos básicos y fijamos la notación que usamos a lo largo de esta memoria. Además recordamos algunas de las propiedades ya conocidas de las singularidades casi-ordinarias. Suponemos que el cuerpo sobre el que trabajamos es $k = \mathbb{C}$, aunque los resultados que vamos a presentar se verifican para cualquier cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero. Denotamos por $R_d := \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_d]]$ al anillo de series de potencias formales en d indeterminadas, si bien un desarrollo análogo es igualmente válido tomando $R_d = \mathbb{C}\{X_1, \dots, X_d\}$ el anillo de series de potencias convergentes. También denotaremos por $L_d := Q(R_d)$ el cuerpo de fracciones de R_d y por $\overline{L_d}$ una clausura algebraica de L_d . Asimismo, fijado $n \in \mathbb{N}$ denotaremos por $R_{d,n} := \mathbb{C}[[X_1^{1/n}, \dots, X_d^{1/n}]]$ al anillo de series de potencias fraccionarias en d indeterminadas con denominador n y por $L_{d,n}$ su cuerpo de fracciones. En lo que sigue denotaremos $X = (X_1, \dots, X_d)$ si d es claro en el contexto. Asimismo $\mathbb{Q}_n = \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ denotará el conjunto de números racionales con denominador n , por tanto si $g \in R_{d,n}$ entonces $g = \sum c_\lambda X^\lambda$ con $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{Q}_n^d = \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d$ y $\lambda_i \geq 0 \forall i$.

1.1. Descripción y Datos Característicos

Consideremos $F \in R_d[Y]$ un polinomio de Weierstrass,

$$F = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_{n-1}(X)Y + a_n(X). \quad (1.1)$$

Dadas ζ_1, \dots, ζ_n las raíces de F el **discriminate** de F , que lo denotaremos

por $\Delta_Y(F)$, es

$$\Delta_Y(F) := \prod_{\substack{i,j \\ i < j}}^n (\zeta_i - \zeta_j)^2.$$

Definición 1.1.1. Decimos que el polinomio de Weierstrass F es **casi-ordinario** si $\Delta_Y(F) = X_1^{\mu_1} \dots X_d^{\mu_d} U$ con $\mu_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \dots, d$ y U una unidad en $\mathbb{C}[[X]]$.

Supongamos que $F = fg$, entonces su discriminante descompone como,

$$\Delta(F) = \Delta(f)\Delta(g)\text{Res}(f, g)^2, \quad (1.2)$$

donde por $\text{Res}(f, g)$ denotamos la **resultante** de f y g , es decir

$$\text{Res}(f, g) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\zeta_i - \zeta_j),$$

siendo ζ_i (resp. ζ_j) las raíces de f (resp. g).

Proposición 1.1.2. Si $F = \prod_{i=1}^r f_i$ es un polinomio de Weierstrass casi-ordinario con r componentes irreducibles f_i , entonces cada una de ellas es un polinomio de Weierstrass casi-ordinario. El recíproco no es cierto.

Demostración: Si F es casi-ordinario y fijamos $i = 1$ la primera componente irreducible. Por (1.2) sabemos que el discriminante verifica $\Delta(F) = \Delta(f_1)\Delta(f_2 \dots f_r)\text{Res}(f_1, f_2 \dots f_r)^2 = X_1^{\mu_1} \dots X_d^{\mu_d} U$. Se deduce que necesariamente $\Delta(f_1) = X_1^{\mu'_1} \dots X_d^{\mu'_d} U'$ siendo U' una unidad y $\mu'_i \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, consideramos los polinomios casi-ordinarios $f_1 = Y^2 - X_1$ y $f_2 = Y^2 - X_2$. Se tiene $\Delta(f_1 f_2) = 16X_1 X_2 (X_1 - X_2)^4$, que no tiene monomio principal. Por lo tanto $f_1 f_2$ no es casi-ordinario. \square

Sea $(S, 0) \subset (\mathbb{C}^{d+1}, 0)$ un germen de una hipersuperficie singular con ecuación $F = 0$, no necesariamente irreducible.

Definición 1.1.3. Decimos que $(S, 0)$ es una **singularidad casi-ordinaria** si existen coordenadas locales (X, Y) tal que F^T (F en las nuevas coordenadas), se puede escribir como un polinomio de Weierstrass en Y y el discriminante de la proyección $pr : (S, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^d, 0)$, dada por $(X, Y) \rightarrow X$, está contenido en $\{X_1, \dots, X_d\} = (0, 0)$, o lo que es lo mismo F^T es un polinomio de Weierstrass casi-ordinario.

Definición 1.1.4. Sea $\zeta \in R_{d,n}$ una serie de potencias fraccionaria con denominador n que no es unidad. Decimos que ζ es una **rama casi-ordinaria** si el polinomio mínimo de ζ sobre L_d es un polinomio de Weierstrass casi-ordinario irreducible.

El teorema de Jung-Abhyankar (ver [2], Th 3) nos garantiza que todas las raíces de un polinomio casi-ordinario F son elementos del anillo de series de potencias fraccionarias $R_{d,n}$ para un cierto $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Teorema 1.1.5. (Th 3 de [2] o Capítulo 5 de [70]) Sea $F \in \mathbb{C}[[X]][[Y]]$ un polinomio de Weierstrass y sea L el cuerpo de descomposición de F sobre L_d en $\overline{L_d}$. Si $\Delta_Y(F) = X_1^{\mu_1} \dots X_h^{\mu_h} U$ con $h \in \{1, \dots, d\}$, $\mu_i \in \mathbb{N} \forall i$ y $U \in \mathbb{C}[[X]]$ una unidad, entonces existen $e_1, \dots, e_h \in \mathbb{N}$ tal que $L \subset L_d[X_1^{1/e_1}, \dots, X_h^{1/e_h}]$.

Sea ζ una raíz de F , existe $e \in \mathbb{N}$ de manera que $\zeta \in R_{d,e}$. En caso de ser F irreducible se tiene que $e = n$, esto no es cierto en general. Sean ζ_1, \dots, ζ_n todas las raíces de F , vamos a describir como se construyen todas las raíces a partir de una de ellas.

Lema 1.1.6. La extensión $L_d \subset L_{d,n}$ es de Galois y su grupo de Galois, que denotamos por $G := \text{Gal}(L_{d,n}/L_d)$, es canónicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^d/n\mathbb{Z}^d$.

Demostración: Sea $P(T) = (T^n - X_1) \dots (T^n - X_d) \in L_d[T]$. Como $L_{d,n}$ es el cuerpo de descomposición de P sobre L_d , entonces la extensión $L_{d,n}/L_d$ es de Galois, es más el grado de dicha extensión es $[L_{d,n} : L_d] = n^d$.

Por otra parte, para cada $s = (\sigma_1, \dots, \sigma_d) \in \mathbb{Z}^d$ consideramos $\phi_s \in G$ definido como $\phi_s(X_i^{1/n}) = \epsilon^{\sigma_i} X_i^{1/n}$, donde ϵ es una raíz n -ésima primitiva de la unidad en \mathbb{C} . Es fácil ver que la aplicación $\mathbb{Z}^d/n\mathbb{Z}^d \rightarrow G$ que manda $s \rightarrow \phi_s$ es un isomorfismo. \square

Sean $\{\zeta_j\}_{j=1}^n$ las raíces de F y supongamos que $\zeta = \zeta_1 = H(X_1^{1/n} \dots, X_d^{1/n})$ es una de ellas. Para $j = 2, \dots, n$ existe $s_j = (\sigma_{j,1}, \dots, \sigma_{j,d}) \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\zeta_j = \phi_{s_j}(\zeta) = \phi_{s_j}(H(X_1^{1/n} \dots, X_d^{1/n})) = H(\epsilon_{j,1} X_1^{1/n} \dots, \epsilon_{j,d} X_d^{1/n})$, siendo $\epsilon_{j,k} = \epsilon^{\sigma_{j,k}}$ y ϵ una raíz primitiva n -ésima de la unidad. Evidentemente las raíces del polinomio F son los elementos del conjunto:

$$\{H(\epsilon_1 X_1^{1/n}, \dots, \epsilon_d X_d^{1/n})\}$$

donde $\epsilon_1, \dots, \epsilon_d$ son raíces n -ésimas de la unidad, nótese que solamente hay n distintas.

Nota 1.1. Una raíz ζ de F es un elemento de $L_{d,n}$ y como tal se puede escribir de la forma $\zeta = \sum_{i \in I} \alpha_i \underline{X}^{r_i/n}$, con $r_i/n = (r_{i,1}/n, \dots, r_{i,d}/n) \in$

$\mathbb{Q}_{\geq 0}^d$ e interpretando $\underline{X}^{r_i/n}$ como $X_1^{r_{i,1}/n} \cdots X_d^{r_{i,d}/n}$. Consideramos el cuerpo intermedio $L_d(\zeta)$ de la extensión $L_{d,n}/L_d$, existe $g \in I$ tal que $L_d(\zeta) = L_d[\underline{X}^{r_1/n}, \dots, \underline{X}^{r_g/n}]$. Asociamos a $L_d(\zeta)$ el \mathbb{Z} -submódulo $N(\zeta)$ de \mathbb{Z}^d generado por $n\mathbb{Z}^d$ y r_1, \dots, r_g .

El grupo de Galois $G(\zeta) = \text{Gal}(L_d(\zeta)/L_d)$ asociado a la extensión $L_d(\zeta)/L_d$ es isomorfo al grupo $\text{Gal}(L_{d,n}/L_d)/\text{Gal}(L_{d,n}/L_d(\zeta))$. A su vez $\text{Gal}(L_{d,n}/L_d(\zeta))$ no es otra cosa que

$$\{\phi_s \in G \mid \langle r, s \rangle = 0 \pmod n, \forall r \in N(\zeta)\}.$$

Es claro que todas las raíces de un polinomio de Weierstrass F casi-ordinario son ramas casi-ordinarias. En particular, si $d = 1$ toda serie de potencias fraccionaria que no es una unidad es una rama casi-ordinaria. Por ello las curvas planas son el ejemplo más sencillo de singularidades casi-ordinarias.

Dadas dos raíces ζ_i, ζ_j de un polinomio de Weierstrass casi-ordinario F , es claro por la definición del discriminante, que $(\zeta_i - \zeta_j) = \underline{X}^{\lambda_{ij}} \epsilon_{ij}$ donde ϵ_{ij} es una unidad en $R_{d,n}$ y $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^d$. Cuando hacemos variar el conjunto de raíces obtenemos un conjunto de exponentes que juega un papel muy importante en nuestro desarrollo

$$V_f(f) := \{\lambda_{i,j} \mid (\zeta_i - \zeta_j) = \underline{X}^{\lambda_{i,j}} \epsilon_{i,j}\}_{i,j}. \quad (1.3)$$

Salvo mención expresa, supondremos que \mathbb{Q}^d está dotado de un orden parcial producto, es decir, dados $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}^d$ decimos que $\lambda \leq \mu$ si $\lambda_i \leq \mu_i$ para todo $i = 1, \dots, n$. Escribiremos $\lambda < \mu$ si además $\lambda \neq \mu$.

Sea f_i una componente irreducible de F , consideramos el siguiente subconjunto de $V_f(f)$,

$$V_f(f_i) := \{\lambda_{s,t} \mid \zeta_s \neq \zeta_t, f(\zeta_s) = 0, f_i(\zeta_t) = 0\}.$$

El conjunto $V_f(f_i)$ (ver [76] o [99]) verifica que es totalmente ordenado para el orden \leq definido anteriormente. Esto hace que tenga sentido el siguiente concepto, ya que siempre existe.

Definición 1.1.7. Dadas f_i y f_j componentes irreducibles de F se dice que tienen **orden de contacto** u **orden de coincidencia** $k(f_i, f_j)$ si este es el mayor exponente del conjunto $\{\lambda_{s,t} \mid f_i(\zeta_s) = 0, f_j(\zeta_t) = 0\}$.

Supongamos en lo que resta de sección que F es irreducible. El conjunto descrito en (1.3) no es otro que el de los exponentes característicos.

Definición 1.1.8. Se definen los **Exponentes Característicos** de F , o de ζ raíz de F , como el conjunto $\{\lambda_{ij} \mid (\zeta_i - \zeta_j) = \underline{X}^{\lambda_{ij}} \epsilon_{ij}\}_{i,j} = \{\lambda_k\}_{k=1}^g$. Para cada λ_i con $i = 1, \dots, g$ el correspondiente monomio $\underline{X}^{\lambda_i}$ se dice que es un **Monomio Característico** de F .

Sea ζ una rama casi-ordinaria, sus exponentes característicos verifican las siguientes propiedades, que caracterizan a las ramas casi-ordinarias.

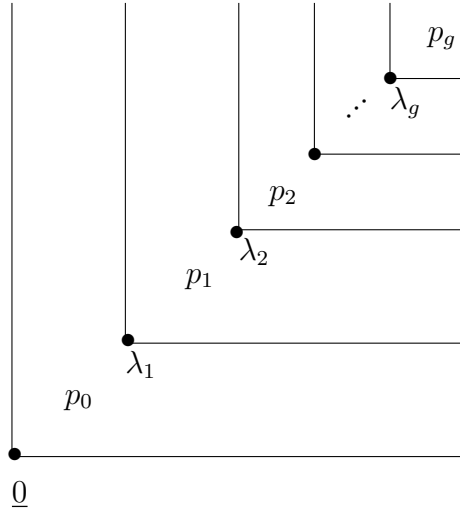
Proposición 1.1.9. (Ver Proposition 1.5 en [75] o Proposition 1.3 en [47]) Sea $\zeta = \sum c_\lambda \underline{X}^\lambda \in R_{d,n}$. Entonces ζ es una rama casi-ordinaria si y solo si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_g \in \mathbb{Q}_n^d$ tales que:

1. $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_g$, $c_{\lambda_i} \neq 0$ para $i = 1, \dots, g$.
2. Si $c_\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in \mathbb{Z}^d + \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \mathbb{Z}\lambda_i$.
3. $\lambda_j \notin \mathbb{Z}^d + \sum_{\lambda_i < \lambda_j} \mathbb{Z}\lambda_i$, para $1 \leq j \leq g$.

Nótese que podemos escribir $\zeta = \sum c_\lambda \underline{X}^\lambda = p_0 + \dots + p_g$ de manera única, donde

$$p_j = \sum_{\lambda \geq \lambda_j} c_\lambda \underline{X}^\lambda \setminus \sum_{\lambda \geq \lambda_{j+1}} c_\lambda \underline{X}^\lambda = \underline{X}^{\lambda_j} \cdot U_j \quad (1.4)$$

siendo U_j una unidad. El siguiente dibujo puede ayudar a visualizar quien es p_j , $\forall j$.



Si denotamos por $\lambda_i = (\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,d}) \in \mathbb{Q}^d$ podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las coordenadas están ordenadas de manera que:

$$(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{g,1}) >_{lex} (\lambda_{1,2}, \dots, \lambda_{g,2}) >_{lex} \dots >_{lex} (\lambda_{1,d}, \dots, \lambda_{g,d}), \quad (1.5)$$

en dicho caso decimos que las coordenadas están **bien ordenadas**.

Tras hacer un cambio de coordenadas también podemos suponer que $p_0 = 0$. En dicho caso decimos que las coordenadas locales son **buenas**.

Definición 1.1.10. *Decimos que una rama casi-ordinaria está **normalizada** si verifica:*

- (i) *Las coordenadas están bien ordenadas.*
- (ii) *Las coordenadas son buenas.*
- (iii) *Cuando el primer exponente característico es de la forma $\lambda_1 = (\lambda_{1,1}, 0, \dots, 0)$ entonces $\lambda_{1,1} > 1$.*

Es conocido que a partir de dos ramas casi-ordinarias obtenidas por proyecciones casi-ordinarias diferentes de una hipersuperficie singular irreducible se pueden obtener exponentes característicos diferentes, es decir, los exponentes característicos dependen de la proyección casi-ordinaria. Esta fue una obstrucción al desarrollo de las singularidades casi-ordinarias y que estuvo sin resolver durante dos décadas, hasta que Lipman, primero para superficies (ver [75]) y más tarde en general (ver [76]), probó que cualquier singularidad casi-ordinaria admite (tras un cambio de coordenadas) una rama normalizada. Además probó que los exponentes característicos de la rama normalizada son únicos, siendo así un invariante de la singularidad. También y de forma análoga al caso de curvas planas Gau y Lipman (ver [47] y [76]) probaron que los exponentes característicos de una rama casi-ordinaria normalizada, determinan y están determinados por el tipo topológico de la singularidad.

Denotamos por $M = M_0$ al retículo \mathbb{Z}^d y para $j = 1, \dots, g$ sea $M_j = \mathbb{Z}^d + \sum_{\lambda_i < \lambda_{j+1}} \mathbb{Z}\lambda_i$, con $\lambda_{g+1} = \infty$ por convenio. Por n_j denotamos el índice de M_{j-1} en M_j para $j = 1, \dots, g+1$, y $e_{i-1} = n_i \cdots n_g$ para $i = 1, \dots, g+1$ con $n_{g+1} = 1$. A la sucesión $(n_i)_{1 \leq i \leq g+1}$ se la llama **n-sucesión** asociada a los exponentes característicos. Una primera observación es que $e_0 = n = [L_d[\zeta] : L_d]$ y que $e_g = 1$, además se verifican las siguientes propiedades:

Proposición 1.1.11.

- (i) $L_d[\zeta] = L_d[\underline{X}^{\lambda_1}, \dots, \underline{X}^{\lambda_g}]$.
- (ii) $e_i = [L_d[\zeta] : L_d[\underline{X}^{\lambda_1}, \dots, \underline{X}^{\lambda_i}]]$, para $i = 1, \dots, g$.
- (iii) $n_j = [L_d[\underline{X}^{\lambda_1}, \dots, \underline{X}^{\lambda_j}] : L_d[\underline{X}^{\lambda_1}, \dots, \underline{X}^{\lambda_{j-1}}]]$, para $j = 1, \dots, g$.

Demostración:

- (i) Lema 5.7 en [76].
- (ii),(iii) Las extensiones $[L_d[\zeta] : L_d[\underline{X}^{\lambda_1}, \dots, \underline{X}^{\lambda_i}]]$ son de Galois ya que F tiene todas sus raíces en $L_d[\zeta]$, y por tanto e_j y n_j respectivamente son el grado de las correspondientes extensiones de Galois puesto que el polinomio mínimo de $\underline{X}^{\lambda_j}$ sobre $L_d[\underline{X}^{\lambda_1}, \dots, \underline{X}^{\lambda_j}]$ es $Y^{n_j} - \underline{X}^{n_j \lambda_j}$. \square

A continuación vamos a dar un resultado práctico que nos permite calcular de manera efectiva n_j y por tanto e_k para cada $j = 1, \dots, g+1$ y $k = 0, \dots, g$.

Sea $\zeta \in L_{d,n}$ una raíz de F , entonces n es el denominador de los $\lambda_{i,j}$, $i = 1, \dots, g$, $j = 1, \dots, d$, de manera que los exponentes característicos λ_i son elementos de \mathbb{Q}_n^d . Sean $r_i = n\lambda_i = (r_{i,1}, \dots, r_{i,d}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ para $i = 1, \dots, g$.

Para cada $i = 1, \dots, g+1$, sea θ_i es el máximo común divisor de todos los menores de orden d de la $(d, d+i-1)$ -matriz $(nI_d \mid r_1^t \mid \dots \mid r_{i-1}^t)$.

Definición 1.1.12. *A la secuencia $(\theta_i)_{1 \leq i \leq g+1}$ se le llama **sucesión de divisores** asociada a los exponentes característicos.*

Nota 1.2. Obsérvese que $\theta_1 = n^d$, también se tiene que $\theta_{g+1} = n^{d-1}$ y se verifica que $\theta_{g+1} \mid \theta_g \mid \dots \mid \theta_1$. Para cada $i = 1, \dots, g$ podemos calcular $n_i = \theta_i / \theta_{i+1}$.

Nota 1.3. Más general, si $h \in R_d[Y]$ es un polinomio no necesariamente casi-ordinario pero tal que existe $n \in \mathbb{N}$ de manera que todas las raíces de h verifican $\eta_h \in R_{d,n}$, podemos dotar a $R_{d,n}$ de un orden total que denotamos por \prec , y que se define como sigue, decimos $m_1 = \underline{X}^{\alpha/n} \prec m_2 = \underline{X}^{\beta/n}$ si $\alpha_1 + \dots + \alpha_d < \beta_1 + \dots + \beta_d$ o si $\alpha_1 + \dots + \alpha_d = \beta_1 + \dots + \beta_d$ entonces $\alpha < \beta$ para el orden lexicográfico. Para este orden podemos escribir $\eta_h = \sum_{i \in I(\eta_h)} \alpha_i M_i$, de manera que $M_i = \underline{X}^{\lambda_i}$ juegan el papel de los exponentes característicos, tiene sentido considerar la sucesión de divisores θ_i y la n -sucesión n_i para $i \in I(\eta_h)$, aunque existe un índice s a partir del cual las sucesiones se vuelven estacionarias.

1.2. Cálculo de las raíces. Algoritmo de Newton

En lo que resta del capítulo vamos a reproducir el algoritmo descrito en [70], que calcula las raíces de un polinomio irreducible de Weierstrass F como

en 1.1, cuyas raíces son series de potencias fraccionarias, en particular sabemos que si es casi-ordinario esto ocurre. Este algoritmo es una generalización del caso de curvas planas que se puede ver en [29].

El Teorema 1.1.5 nos garantiza la existencia de una raíz $\zeta = \sum_{i \in I} \alpha_i M_i \in L_{d,n}$, la cual podemos suponer que está en su forma normal. Cada monomio M_i se escribe como $\underline{X}^{r_i/n}$, nuestro objetivo es calcular tanto los M_i como los $\alpha_i \forall i \in I$ en función de los coeficientes a_j de F , para $j = 1, \dots, n$.

Al igual que definíamos en la sección anterior una n -secuencia para los exponentes característicos también podemos construir una n -secuencia $(n_i)_{i \in I}$ asociada a $(r_i)_{i \in I}$, así como $e_i := [L[\zeta] : L[\underline{X}^{r_1/n}, \dots, \underline{X}^{r_{i-1}/n}]] \forall i \in I$, verificando que $e_i = n_i e_{i+1}$ en particular $e_1 = n = n_1 e_2$.

Algoritmo 1.1. (Newton Generalizado)

Paso 1: Cálculo de M_1 y α_1 .

Consideramos el término independiente $a_n(X)$ de F que es igual al producto de las raíces $\zeta^1 \dots \zeta^n$, por lo tanto M_1^n no es otro que el monomio principal de $a_n(X)$. Luego r_1 es el menor elemento en el $Supp(a_n(X))$, y sin ningún coste adicional sabemos que $n = n_1 e_2$.

Ahora consideramos la extensión cíclica $L \subset L(M_1)$ que tiene grado n_1 y por tanto $[L[\zeta] : L[M_1]] = e_2$. Sea $\epsilon \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva n_1 -ésima de la unidad, por lo tanto tenemos n_1 monomios conjugados y distintos de M_1 sobre L , digamos $\epsilon^l M_1$ con $l = 1, \dots, n_1$.

De lo anterior se deduce que podemos ordenar las raíces conjugadas de ζ de la siguiente manera:

$$\zeta^j = \begin{cases} \alpha_1 M_1 + \zeta_1^j & \text{para } j = 1, \dots, e_2 \\ \alpha_1^j M_1 + \zeta_1^j & \text{para } j = e_2 + 1, \dots, n \end{cases}$$

donde

$$\alpha_1^{le_2+l'} = \epsilon_1^l \alpha_1, \quad l \in \{1, \dots, n_1 - 1\}, l' \in \{1, \dots, e_2\}.$$

Se deduce que, existen n_1 formas diferentes de escoger el coeficiente principal de ζ . Dos elecciones distintas difieren en una raíz n_1 -ésima de la unidad. Claramente si $\zeta_1^1 \neq 0$ entonces M_2 es el monomio principal de ζ_1^j para todo $j = 1, \dots, n$.

Sean $S_1, \dots, S_n \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_n]$ los polinomios simétricos elementales en las indeterminadas T_1, \dots, T_n . Queremos calcular los términos principales de $a_{n-1}(X) = (-1)^{n-l} S_{n-l}(\zeta^1, \dots, \zeta^n)$, para $l \in \{0, \dots, n-1\}$. El polinomio mínimo de $\alpha_1 M_1$ sobre L es $Y^{n_1} - \alpha_1^{n_1} M_1^{n_1}$, luego

$$(Y^{n_1} - \alpha_1^{n_1} M_1^{n_1})^{e_2} = \sum_{l=0}^{e_2} \binom{e_2}{l} Y^{ln_1} (-\alpha_1^{n_1} M_1^{n_1})^{e_2-l}.$$

Por lo tanto M_1^{n-l} es el monomio principal de a_{n-l} si y solo si $a_{n-l} \neq 0$ y $n_1 \mid (n-l)$. Sea $l' \in \{1, \dots, e_2\}$, y sea $\beta_{l'}$ el coeficiente principal de $a_{l'n_1}$ si $a_{l'n_1} \neq 0$ y definimos $\beta_{l'} := 0$ si $a_{l'n_1} = 0$. Comparando el coeficiente del monomio principal de M_1^n en $F(\zeta) = 0$ se puede comprobar que α_1 es raíz del polinomio:

$$\Omega(T) = T^{n_1 e_2} + \beta_1 T^{n_1(e_2-1)} + \dots + \beta_{e_2} = (T - \alpha_1^{n_1})^{e_2} \in \mathbb{C}[T].$$

Ahora hacemos la sustitución $Y_1 := Y - \alpha_1 M_1$ y obtenemos

$$F_1(X_1^{1/n}, \dots, X_d^{1/n}, Y_1) := F(X_1, \dots, X_d, Y_1 + \alpha_1 M_1)$$

donde

$$F_1 = Y_1^n + a_{1,1}(X_1^{1/n}, \dots, X_d^{1/n})Y_1^{n-1} + \dots + a_{1,n}(X_1^{1/n}, \dots, X_d^{1/n}).$$

Que es un polinomio en $R_{d,n}[Y_1]$ de grado n con raíces son:

$$\zeta_1^j \text{ para } j = 1, \dots, e_2 \quad \text{y} \quad \beta_{1,1}^j M_1 + \zeta_1^j \text{ para } j = e_2 + 1, \dots, n.$$

Paso i a $i+1$: Hipótesis de Inducción.

Supongamos que hemos calculado M_1, \dots, M_i y $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ para un cierto i , asimismo hemos calculado n_1, \dots, n_i y e_1, \dots, e_i . Además en el transcurso del algoritmo también hemos calculado:

- Las raíces conjugadas de ζ ordenadas,

$$\zeta^j = \begin{cases} \sum_{l=1}^i \alpha_l M_l + \zeta_i^j & \text{para } j = 1, \dots, e_{i+1} \\ \sum_{l=1}^i \alpha_{i,l}^j M_l + \zeta_i^j & \text{para } j = e_{i+1} + 1, \dots, n \end{cases}$$

donde $\alpha_{i,l}^j$, $l = 1, \dots, i$ y $j = e_{i+1} + 1, \dots, n$, son elementos no nulos de \mathbb{C} . Si $\zeta_i^1 \neq 0$, entonces el monomio principal de ζ_i^j es M_{i+1} para todo $j = 1, \dots, n$.

- Los polinomios,

$$F_i = Y_i^n + a_{i,1}(X_1^{1/n}, \dots, X_d^{1/n})Y_i^{n-1} + \dots + a_{i,n}(X_1^{1/n}, \dots, X_d^{1/n}) \in R_{d,n}[Y_i].$$

- Para cada $l \in \{1, \dots, i\}$ y para todo $j \in \{e_{l+1} + 1, \dots, e_l\}$ tenemos la suma de monomios

$$G_i^j := \sum_{l'=l}^i \beta_{i,l'}^j M_{l'}, \quad \beta_{i,l'}^j \in k \text{ para } l' \in \{l, \dots, i\}, \beta_{i,l}^j \neq 0$$

tal que

$$\zeta_i^j, \quad j = 1, \dots, e_{i+1}, \quad G_i^j + \zeta_i^j \text{ para } j = e_{i+1} + 1, \dots, n,$$

son las n raíces de F_i .

Paso $i + 1$: Paso de Inducción.

Puede suceder que $a_{i,n} = 0$ en cuyo caso $\zeta_i^1 = 0$, luego $\zeta = \sum_{l=1}^i \alpha_l M_l$ es una raíz de F . Supongamos que $a_{i,n} \neq 0$.

Sabemos que $e_l - e_{l+1} = e_{l+1}(n_l - 1)$, para $l = 1, \dots, i$, y el monomio

$$M_{i+1}^{e_{i+1}} M_i^{e_i - e_{i+1}} M_{i-1}^{e_{i-1} - e_i} \dots M_1^{e_1 - e_2} = M_{i+1}^{e_{i+1}} \prod_{l=1}^i M_l^{e_{l+1}(n_l - 1)}$$

es el monomio principal de $a_{i,n}(X_1^{1/n}, \dots, X_d^{1/n})$. Luego se puede calcular M_{i+1} y por tanto también n_{i+1} y $e_{i+2} = e_{i+1}/n_{i+1}$.

Sea $\epsilon_{i+1} \in \mathbb{C}$ una raíz primitiva n_{i+1} -ésima de la unidad. Podemos ordenar las raíces conjugadas de ζ de la siguiente manera:

$$\zeta^j = \begin{cases} \sum_{l=1}^i \alpha_l M_l + \alpha_{i+1} M_{i+1} + \zeta_{i+1}^j & \text{para } j = 1, \dots, e_{i+2} \\ \sum_{l=1}^i \alpha_l M_l + \alpha_{i+1}^j M_{i+1} + \zeta_{i+1}^j & \text{para } j = e_{i+2} + 1, \dots, e_{i+1} \end{cases}$$

donde

$$\alpha_{i+1}^{le_{i+2} + l'} = \epsilon_{i+1}^l \alpha_{i+1} \text{ para } l = 1, \dots, n_{i+1} - 1 \text{ y } l' = 1, \dots, e_{i+2}.$$

Esto nos proporciona n_{i+1} posibles elecciones del coeficiente principal α_{i+1} de ζ_i^1 , de manera que dos cualesquiera de ellas difieren en una raíz n_{i+1} -ésima de la unidad. Si $\zeta_{i+1}^j \neq 0$, podemos deducir que M_{i+1} es el monomio principal de ζ_{i+1}^j para $j = 1, \dots, e_{i+1}$.

Por tanto las raíces de F_i son:

$$\zeta_i^j = \begin{cases} \alpha_{i+1} M_{i+1} + \zeta_{i+1}^j & \text{para } j = 1, \dots, e_{i+2} \\ \alpha_{i+1}^j M_{i+1} + \zeta_{i+1}^j & \text{para } j = e_{i+2} + 1, \dots, e_{i+1} \\ G_i^j + \alpha_{i+1}^j M_{i+1} + \zeta_{i+1}^j & \text{para } j = e_{i+1} + 1, \dots, n. \end{cases}$$

Sean $S_1, \dots, S_{e_{i+1}} \in \mathbb{Z}[T_1, \dots, T_{e_{i+1}}]$ los polinomios simétricos elementales de las variables $T_1, \dots, T_{e_{i+1}}$. El coeficiente de $Z^{e_{i+1}-n_{i+1}}$ en el polinomio

$$(Z^{n_{i+1}} - 1)^{e_{i+2}} = \prod_{i=1}^{n_{i+1}} (Z - \epsilon_{i+1}^{l-1})^{e_{i+2}}$$

es

$$-e_{i+2} = (-1)^{n_{i+1}} S_{n_{i+1}}(1, \dots, 1, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_{i+1}^{n_{i+1}-1}, \dots, \epsilon_{i+1}^{e_{i+2}}).$$

El coeficiente $a_{i,n-e_{i+1}+n_{i+1}}(X_1^{1/n}, \dots, X_d^{1/n})$ de $Y^{e_{i+1}-n_{i+1}}$ en F_i es, salvo signo, la $(n - e_{i+1} + n_{i+1})$ -ésima función simétrica de raíces de F_i . Por lo tanto el monomio principal de $a_{i,n-e_{i+1}+n_{i+1}}$ es el producto de los monomios principales de $S_{n_{i+1}}(\zeta_i^1, \dots, \zeta_i^{e_{i+1}})$ y el monomio principal de $G_i^{e_1} \dots G_i^{e_{i+1}+1}$. Luego es igual a

$$M_{i+1}^{n_{i+1}} M_i^{e_i - e_{i+1}} M_{i-1}^{e_{i-1} e_i} \dots M_1^{e_1 - e_2} = M_{i+1}^{n_{i+1}} \prod_{l=1}^i M_l^{e_{l+1}(n_l - 1)},$$

el coeficiente principal β de $a_{i,n-e_{i+1}+n_{i+1}}$, es igual a

$$(-1)^{n-e_{i+1}+1} e_{i+2} \alpha_{i+1}^{n_{i+1}} \prod_{l=1}^i \prod_{l'=e_l}^{e_{l+1}+1} \beta_{i,l}^{l'}$$

y por tanto obtenemos

$$\alpha_{i+1}^{n_{i+1}} = (-1)^{n-e_{i+1}+1} \frac{\beta}{e_{i+2}} \left(\prod_{l=1}^i \prod_{l'=e_l}^{e_{l+1}+1} \beta_{i,l}^{l'} \right)^{-1}. \quad (1.6)$$

Sabemos que α_{i+1} queda determinada salvo multiplicación de una raíz n_{i+1} -ésima de la unidad. Luego α_{i+1} es un elemento de \mathbb{C} verificando la ecuación (1.6).

También podemos calcular los coeficientes α_{i+1}^j , $l = 1, \dots, i+1$, $j = e_{i+1} + 1, \dots, n$, que aparecen en las raíces,

$$\zeta^j = \begin{cases} \sum_{l=1}^{i+1} \alpha_l M_l + \zeta_{i+2}^j & \text{para } j = 1, \dots, e_{i+2} \\ \sum_{l=1}^{i+1} \alpha_{i+1,l}^j M_l + \zeta_{i+2}^j & \text{para } j = e_{i+2} + 1, \dots, n. \end{cases}$$

A continuación hacemos la sustitución

$$Y_{i+1} := Y_i - \alpha_{i+1} M_{i+1},$$

así obtenemos un polinomio $F_{i+1}(X_1^{1/n}, \dots, X_d^{1/n}, Y_{i+1}) \in R_{d,n}[Y_{i+1}]$ que es mónico y tiene grado n , con raíces

$$\zeta_{i+1}^j \text{ para } j = 1, \dots, e_{i+2}, \quad G_{i+1}^j + \zeta_{i+1}^j, \quad j = e_{i+2} + 1, \dots, n$$

donde

$$G_{i+1}^j := \beta_{i+1,i+1}^j M_{i+1}, \quad \beta_{i+1,i+1}^j := \alpha_{i+1}^j - \alpha_{i+1} \neq 0, \quad j = e_{i+2} + 1, \dots, e_{i+1}$$

y

$$G_{i+1}^j := G_i^j - \alpha_{i+1} M_{i+1}, \quad j = e_{i+1} + 1, \dots, e_1.$$

Ejemplo 1.1. Queremos calcular las raíces de

$$\begin{aligned} F &= (Y^2 - X_1^3)^2 + (-2X_1^7 X_2 - 2X_1^4 X_2 Y^2 + X_1^8 X_2^2) = \\ &Y^4 + (-2X_1^3 - 2X_1^4 X_2) Y^2 + (X_1^6 - 2X_1^7 X_2 + X_1^8 X_2^2). \end{aligned}$$

El monomio principal de a_4 es X_1^6 por tanto $r_1 = (6, 0)$ y $M_1 = X_1^{6/4}$. De lo que se deduce que $\theta_1 = 16$ y $\theta_2 = 8$ lo que implica que $n_1 = 2$ y $e_2 = 2$.

El coeficiente α_1 es una de las raíces de

$$\Omega(T) = T^4 - 2T^2 + 1 = (T^2 - 1)^2,$$

luego $\zeta = X_1^{3/2} + \zeta_1$. Se sustituye $Y_1 = Y - X_1^{3/2}$, resultando

$$F_1 = Y_1^4 + 4Y_1^3 X_1^{3/2} + Y_1^2(4X_1^3 - 2X_1^4 X_2) - 4Y_1 X_1^{11/2} X_2 - 4X_1^7 X_2 + X_1^8 X_2^2.$$

Según el algoritmo el monomio principal de $a_{1,4} = -4X_1^7 X_2 + X_1^8 X_2^2$ es $M_1^2 M_2^2$, de lo cual se deduce que $M_2 = X_1^2 X_2^{1/2}$, $r_2 = (8, 2)$, $\theta_3 = 4$, $n_2 = 2$ y $e_3 = e_2/n_2 = 1$. El coeficiente principal de $a_{1,4-2+2}$ es -4 , luego tenemos que

$$\alpha_2^2 = (-1)^3 \frac{(-4)}{1} \frac{1}{(-2)(-2)} = 1.$$

Esto implica que $\zeta = X_1^{3/2} + X_1^2 X_2^{1/2} + \zeta_2$. Ahora hacemos el cambio $Y_2 = Y_1 - X_1^2 X_2^{1/2}$, obteniendo

$$F_2 = Y_2^4 + Y_2^3(4X_1^2 X_2^{1/2} + 4X_1^{3/2}) + Y_2^2(4X_1^4 X_2 + 12X_1^{7/2} X_2^{1/2} + 4X_1^3) + Y_2(8X_1^{11/2} X_2 + 8X_1^5 X_2^{1/2}).$$

Como $a_{2,4} = 0$ entonces $\zeta_2 = 0$ y por tanto $\zeta = X_1^{3/2} + X_1^2 X_2^{1/2}$. Las otras raíces son $\zeta^2 = X_1^{3/2} - X_1^2 X_2^{1/2}$, $\zeta^3 = -X_1^{3/2} + X_1^2 X_2^{1/2}$ y $\zeta^4 = -X_1^{3/2} - X_1^2 X_2^{1/2}$.

Capítulo 2

El Semigrupo de una Hipersuperficie Casi-Ordinaria

En este capítulo describimos el semigrupo de una singularidad de hipersuperficie casi-ordinaria $(S, 0)$, así como las principales propiedades del mismo.

El caso irreducible fue tratado por primera vez por Micus y Kiyek en [80] y [69]. Más tarde y simultáneamente fue descrito de diferentes, pero equivalentes, formas por Popescu-Pampu en [88] y González Pérez en [52]. Ellos además prueban que el semigrupo de una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible no depende de la proyección casi-ordinaria elegida (existe un isomorfismo entre dichos semigrupos) y que es un invariante completo de la topología de la singularidad.

En el caso reducible damos dos definiciones, que son las generalizaciones naturales de las dadas por Popescu-Pampu y González Pérez en sus respectivos trabajos. Mostramos que en general ambos semigrupos no coinciden. Fijamos como semigrupo la generalización a la definición de Popescu-Pampu, porque nos permite manejar con mayor facilidad sus elementos y por tanto podemos calcular de forma efectiva los generadores del semigrupo.

2.1. Caso Irreducible

Sea $(S, 0)$ una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible parametrizada por una rama casi-ordinaria ζ y ecuación $f = 0$. Siguiendo las notaciones del capítulo anterior consideramos $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ los exponentes característicos asociados a ζ y para $j = 0, \dots, g$ los retículos $M_j = \mathbb{Z}^d + \lambda_1\mathbb{Z} + \dots + \lambda_j\mathbb{Z}$.

Definimos:

$$\gamma_1 = \lambda_1, \quad \gamma_{j+1} = n_j \gamma_j + \lambda_{j+1} - \lambda_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, g-1. \quad (2.1)$$

Consideramos los subsemigrupos de $(\mathbb{Q}_n^d, +)$, definidos por:

$$\Gamma_j(f) = \mathbb{Z}_{\geq 0}^d + \gamma_1 \mathbb{Z}_{\geq 0} + \dots + \gamma_j \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad \text{para } j = 0, \dots, g.$$

Es posible hacer un desarrollo análogo al que aquí presentamos si se consideran,

$$\bar{\gamma}_1 = n\lambda_1, \quad \bar{\gamma}_{j+1} = n_j \bar{\gamma}_j + n\lambda_{j+1} - n\lambda_j, \quad \text{para } j = 1, \dots, g-1. \quad (2.2)$$

La diferencia es que en este caso $\bar{\gamma}_j \in \mathbb{Z}^d$, y todos los semigrupos son subsemigrupos de $(\mathbb{Z}^d, +)$.

Definición 2.1.1. *El **semigrupo** de la singularidad casi-ordinaria parametrizada por la rama casi-ordinaria ζ es el semigrupo $\Gamma_g(f)$, que también denotaremos por Γ si queda claro del contexto.*

Igualmente los semigrupos $\Gamma_j(f)$ los denotaremos por Γ_j si no hay ambigüedad posible.

El semigrupo de una singularidad casi-ordinaria parametrizada por la rama ζ está caracterizado por las siguientes propiedades, (ver [52, Lemma 3.3]):

Proposición 2.1.2.

- (1) *El sub-retículo de M_g generado por Γ_j es igual a M_j para $0 \leq j \leq g$.*
- (2) *El orden de la imagen de γ_j en el grupo M_j/M_{j-1} es igual a n_j para $j = 1, \dots, g$.*
- (3) *Se tiene que $\gamma_j > n_{j-1}\gamma_{j-1}$ para $j = 2, \dots, g$.*
- (4) *Si un vector $u_j \in M_j$ no tiene coordenadas negativas, entonces $u_j + n_j \gamma_j$ pertenece al semigrupo Γ_j .*
- (5) *El vector $n_j \gamma_j$ pertenece al semigrupo Γ_{j-1} para $j = 1, \dots, g$. Además, se escribe de manera única como*

$$n_j \gamma_j = \alpha^{(j)} + l_1^{(j)} \gamma_1 + \dots + l_{j-1}^{(j)} \gamma_{j-1} \quad (2.3)$$

tal que $0 \leq l_i^j \leq n_i - 1$ y $\alpha^j \in M_0$ para $j = 1, \dots, g$.

Demostración: El apartado (1) Se deduce de la definición de los generadores en (2.1). En cuanto a (2), se deduce de la definición de los enteros n_i y del hecho que $\gamma_i = \lambda_i \bmod M_{i-1}$ para $i = 1, \dots, g$. Para probar (3) se usa de nuevo (2.1) y la desigualdad

$$\begin{aligned} n_j \gamma_j - n_{j-1} \gamma_{j-1} &= n_{j-1}(n_j - 1) \gamma_{j-1} + n_j(\lambda_j - \lambda_{j-1}) > \\ &(n_j - 1)(n_{j-1} \gamma_{j-1} + \lambda_j - \lambda_{j-1}) = (n_j - 1) \gamma_j. \end{aligned}$$

La afirmación (4) es cierta para $j = 1$. Supongamos que es cierta para $j - 1 \geq 1$. Tomamos un vector $u_j \in M_j$ con coordenadas positivas. Entonces es de la forma $u_j = \alpha_j \gamma_j + u'_j$ donde $u'_j \in M_{j-1}$, siendo α_j único con la condición $0 \leq \alpha_j < n_j$. Por la desigualdad anterior, el vector $u_{j-1} := u'_j + n_j \gamma_j - n_{j-1} \gamma_{j-1}$ está en M_{j-1} y tiene coordenada positivas. Por hipótesis de inducción, el vector $u_{j-1} + n_{j-1} \gamma_{j-1} = u'_j + n_j \gamma_j$ está en el semigrupo Γ_{j-1} , y por tanto $u_j + n_j \gamma_j = \alpha_j \gamma_j + u'_j + n_j \gamma_j$ pertenece al semigrupo Γ_j .

Nuevamente por 2.1 se tiene que $n_j \gamma_j = n_j n_{j-1} \gamma_{j-1} + n_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})$. Por (1) y (2) sabemos que el vector $n_j(\lambda_j - \lambda_{j-1})$ esta en M_{j-1} y por la Proposición 1.1.9 tiene coordenadas positivas. Ahora aplicando (4) tenemos la primera afirmación de (5). La existencia de la escritura 2.3 se prueba por inducción sobre j . Para $j = 1$ es trivialmente cierto. Supongamos que para $i = 1, \dots, j - 1$ existen dichas relaciones. Sabemos que $n_j \gamma_j \in \Gamma_{j-1}$, luego tenemos la relación

$$n_j \gamma_j = \alpha_0 + l_1 \gamma_1 + \dots + l_{j-1} \gamma_{j-1}.$$

Al dividir l_{j-1} entre n_{j-1} obtenemos $l_{j-1} = k n_{j-1} + l_{j-1}^j$ con $0 \leq l_{j-1}^j \leq n_{j-1} - 1$. Substituyendo $l_{j-1} \gamma_{j-1}$ por

$$l_{j-1}^j \gamma_{j-1} + k(\alpha^{j-1} + \sum_{i=1}^{j-2} l_i^{j-1} \gamma_i)$$

en la relación anterior obtenemos una fórmula del mismo tipo donde $l_{j-1} = l_{j-1}^j$. Por tanto al iterar este proceso obtenemos la relación buscada. La unicidad se deduce de (2).□

Este resultado es análogo al dado para curvas planas (ver [?], [101]).

Dada $h \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_d]][[Y]]$, decimos que $h(\zeta) \in R = \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_d]][[\zeta]]$ tiene **orden** $\alpha \in \mathbb{Q}_n^d$, si $h(\zeta) = \underline{X}^\alpha U$, donde U es una unidad en $R_{d,n}$. En este caso escribimos $v(h) = \alpha$, aunque v no es una valoración. Cuando esto ocurre se dice que h tiene **exponente dominante** para ζ o que es **comparable** con f . Denotaremos por C_f el conjunto de polinomios mónicos comparables con f :

$$C_f = \{h \in R \mid h \text{ mónico}, \exists v(h)\} \quad (2.4)$$

Kiyek y Micus por una parte (ver [69]) y Popescu-Pampu por otra (ver [88]), definen el semigrupo de ζ como el conjunto de órdenes de las funciones comparables con f probando posteriormente su caracterización en términos de los exponentes característicos. Es decir, prueban que

$$\Gamma_g(f) = \{v(h) \in \mathbb{Q}_n^d \mid h \in C_f\}.$$

Sea $\eta = \sum c_v \underline{X}^v \in R_{d,n}$ y $\text{sop}(\eta) = \{v \mid c_v \neq 0\}$ el **soporte** de η . El **poliedro de Newton** de η , $\mathcal{N}(\eta)$, es la envolvente convexa del conjunto $\bigcup_{v \in \text{sop}(\eta)} (v + \mathbb{R}_+^d)$. El borde $\partial\mathcal{N}(\eta)$ del poliedro de Newton de η es el polígono de Newton. Si ζ es una rama casi-ordinaria de f , y $h \in \mathbb{C}[[X]][Y]$. El poliedro de Newton de $h(\zeta) \in R_{d,n}$ lo denotamos por $\mathcal{N}_\zeta(h)$. Nótese que decir que h es comparable con f equivale a decir que $\mathcal{N}_\zeta(h) = \alpha + \mathbb{R}_{\geq 0}^d$, siendo α el orden de h .

Sea $\zeta = \sum c_\lambda \underline{X}^\lambda \in R_{d,n}$ una raíz de f y $\sigma \in \text{Gal}(L_{d,n}/L_d)$ un elemento del grupo de Galois de la extensión $L_{d,n}/L$. Puesto que $\sigma(\zeta) = \sum c_\lambda \epsilon^{(s,\lambda)} \underline{X}^\lambda$ para cierto $s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{Z}^d$ (ϵ es una raíz primitiva n -ésima de la unidad) es evidente que $\text{sop}(\zeta) = \text{sop}(\sigma(\zeta))$, es decir, todas las raíces de f tiene el mismo soporte. Como consecuencia

$$\{\lambda_{i,j} \mid (\zeta_i - \zeta_j) = \underline{X}^{\lambda_{i,j}} U_{i,j}\} = \{\lambda_{1,k} \mid (\zeta_1 - \zeta_k) = \underline{X}^{\lambda_{1,k}} U_{1,k}\} \subset \text{sop}(\zeta).$$

En general si $\eta = \sum c_\alpha \underline{X}^\alpha \in R_{d,n}$ y $\sigma \in \text{Gal}(L_{d,n}/L_d)$ se tiene que $\text{sop}(\eta) = \text{sop}(\sigma(\eta))$ y como consecuencia $\mathcal{N}(\eta) = \mathcal{N}(\sigma(\eta))$. En particular, si $h \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ y ζ_1, \dots, ζ_n son todas las raíces de f , se tiene que $h(\zeta_1), \dots, h(\zeta_n)$ son conjugadas con respecto a la acción del grupo de Galois de $L_{d,n}/L_d$ y por tanto $\mathcal{N}_\zeta(h)$ es independiente de la raíz ζ considerada.

Si además suponemos que h es comparable con f (i.e. existe $v(h)$), se tiene que $v(h)$ no depende de la raíz ζ elegida, nótese que $v(h) = \alpha \in \mathbb{Q}^d \Leftrightarrow \mathcal{N}_\zeta(h) = \alpha + \mathbb{R}_{\geq 0}^d$.

Por otra parte sabemos que la resultante de f y h es $\text{Res}(h, f) = \prod_{i=1}^n h(\zeta_i)$. Se tiene que $v(h) = \alpha \in \mathbb{Q}^d$ si y solo si para $i = 1, \dots, n$ tenemos que $h(\zeta_i) = \underline{X}^\alpha U_i$ con U unidad, que a su vez es equivalente a que $\text{Res}(h, f) = \underline{X}^{n\alpha} U$. Resumiendo hemos visto lo siguiente.

Proposición 2.1.3. *Un germen h es comparable con f si y solo si $\text{Res}(h, f) = \underline{X}^\delta U$ con $U \in \mathbb{C}[[X]]$ unidad y $\delta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$. Además, $v(h) = \alpha$ si y solo si $\delta = n\alpha$.*

El conjunto de gérmenes que son **estrictamente comparables** con f , es el conjunto

$$RC_f = \{h \in \mathbb{C}[[X]][Y] \mid h \text{ monico y } fh \text{ es casi-ordinaria}\} \quad (2.5)$$

Nota 2.1. El conjunto $RC_f \subsetneq C_f$, es decir la condición de ser fh casi ordinaria es mucho mas fuerte, incluso cuando ambas f y h son casi-ordinarias como ya vimos en la Proposición 1.1.2.

Ejemplo 2.1. Sea $f = Y - X_1X_2$ y $h = Y - X_1X_2(X_1 + X_2)$ que no es casi-ordinaria luego $h \notin RC_f$, pero como $h(X_1X_2) = X_1X_2(1 - X_1 - X_2)$ entonces $h \in C_f$.

Vamos a generalizar el concepto de orden de coincidencia u orden de contacto dado en la Definición 1.1.7. Denotamos por $\widetilde{R}_d = \widetilde{\mathbb{C}[[X]]}$ el anillo de series de potencias con exponentes fraccionarios, es decir, $\widetilde{R}_d = \lim_{n \rightarrow \infty} R_{d,n}$.

Siguiendo las notaciones de Popescu-Pampu (ver [85]), dados dos elementos $\xi, \eta \in \widetilde{R}_d$ diremos que son **comparables** si $\xi - \eta = \underline{X}^\alpha U$, con U unidad, o equivalentemente diremos que $k(\xi, \eta) = \alpha$. Evidentemente si $f \in R_d[Y]$ es un polinomio mónico se tiene que f es casi-ordinario si y solo si todas las raíces están en \widetilde{R}_d y además son comparables entre si dos a dos.

De manera análoga, si $g, h \in R_d[Y]$ son mónicos denotaremos por $\mathcal{R}(g)$ y $\mathcal{R}(h)$ a sus respectivos conjuntos de raíces y diremos que son **racionalmente comparables** si las raíces de ambos son fraccionarias; es decir, existe m tal que $\mathcal{R}(g) \cup \mathcal{R}(h) \subset R_{d,m} \subset \widetilde{R}_d$, y además para cada $\xi \in \mathcal{R}(g)$ y $\eta \in \mathcal{R}(h)$, entonces ξ y η son comparables. El conjunto de funciones racionalmente comparables a la singularidad casi-ordinaria f lo denotaremos como,

$$\hat{C}_f = \{h \in R_d[Y] \mid h \text{ mónico y racionalmente comparable con } f\}.$$

Si g es además irreducible y ξ es una raíz de f fija, se tiene que g y h son racionalmente comparables si ξ y η_j son comparables para toda raíz η_j de h y además

$$\{k(\xi, \eta) \mid \eta \in \mathcal{R}(h)\} = \{k(\xi, \eta) \mid \xi \in \mathcal{R}(f), \eta \in \mathcal{R}(h)\}.$$

Fijemos ahora $f \in R_d[Y]$ un polinomio casi-ordinario e irreducible, y $h \in R_d[Y]$ mónico de manera que las raíces de h son fraccionarias, i.e., $\mathcal{R}(h) \subset \widetilde{R}_d$. Supongamos que existe $v(h)$, $v(h) = \text{ord}_X h(\zeta) = \alpha$, con ζ raíz de f . Si $\mathcal{R}(h) = \{\eta_1, \dots, \eta_s\}$, tendremos que $h(\zeta) = \prod_{i=1}^s (\zeta - \eta_i) = \underline{X}^\alpha U$. Por lo tanto ζ es comparable con $\eta_i \forall i = 1, \dots, s$ y h es racionalmente comparable con f . Recíprocamente si f es racionalmente comparable con h entonces existe $v(h)$.

Definición 2.1.4. Sean $f, h \in R_d[Y]$ irreducibles y mónicos. Supongamos que $\mathcal{R}(f) \cup \mathcal{R}(h) \subset R_{d,m} \subset \widetilde{R}_d$. Diremos que f y h tiene **orden de coincidencia** $k(f, h)$ si:

1. f y h son racionalmente comparables.
2. Existe $\max\{k(\zeta, \eta) \mid \zeta \in \mathcal{R}(f), \eta \in \mathcal{R}(h)\} = k$, y además $k = k(f, h)$.

Proposición 2.1.5. *Sea f un polinomio casi-ordinario e irreducible, y sea h mónico e irreducible. Supongamos que f y h son racionalmente comparables, entonces $\{k(\zeta, \eta) \mid \zeta \in \mathcal{R}(f), \eta \in \mathcal{R}(h)\}$ es totalmente ordenado, en particular existe el orden de coincidencia de $k(f, h)$.*

Demostración: Supongamos que $\mathcal{R}(f) \cup \mathcal{R}(h) \subset R_{d,m} \subset \widetilde{R}_d$ y sea $G = \text{Gal}(L_{d,n}/L_d)$. Sea ζ una raíz fija de f y supongamos que existen $\eta, \eta' \in \mathcal{R}(h)$ tales que $\alpha = k(\zeta, \eta)$ y $\alpha' = k(\zeta, \eta')$ no son comparables.

Por tanto $\eta' - \zeta = \underline{X}^{\alpha'} U'$ y para todo $\sigma \in G$ se tiene que $(\eta' - \zeta)^\sigma = \underline{X}^{\alpha'} (U')^\sigma$, en particular si consideramos σ tal que $(\eta')^\sigma = \eta$, obtenemos que $\eta - \zeta^\sigma = \underline{X}^{\alpha'} U''$. Como $\eta - \zeta = \underline{X}^\alpha U$, restando obtenemos que

$$\zeta - \zeta^\sigma = (\eta - \zeta^\sigma) - (\eta - \zeta) = \underline{X}^{\alpha'} U'' - \underline{X}^\alpha U.$$

Resultando que ζ y ζ^σ no son comparables. Pero esto es absurdo ya que ζ y ζ^σ son raíces de un polinomio casi-ordinario y por tanto comparables. \square

Como consecuencia se tiene lo siguiente.

Corolario 2.1.6. *Si $f \in R_d[Y]$ es un polinomio casi-ordinario e irreducible y $h \in R_d[Y]$ es irreducible son equivalentes:*

1. f y h son comparables y además existe m tal que $\mathcal{R}(h) \subset R_{d,m}$.
2. f y h son racionalmente comparables.
3. Existe el orden de coincidencia de f y h .

Podemos decir aun mas sobre como se relacionan las raíces de f con un elemento de \widetilde{R}_d .

Lema 2.1.7. *Sea f un polinomio casi-ordinario irreducible y sea $\eta \in \widetilde{R}_d$. Supongamos que η es comparable con f , i.e., es comparable con todas las raíces de f . Entonces el conjunto*

$$\{k(\eta, \zeta) \mid f(\zeta) = 0\} \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_g\}$$

es totalmente ordenado.

Demostración: Sea $\eta \in \widetilde{R}_d$ y supongamos que $\eta - \zeta = \underline{X}^\delta U$, con ζ raíz de f y $\lambda_1 < \dots < \lambda_g$ los exponentes característicos de f . Sea $i = \max\{j \mid \delta \geq \lambda_j\}$, luego $\delta \geq \lambda_i$ pero $\delta \not\geq \lambda_{i+1}$

Si $i = g$ fin. Supongamos que $i < g$ entonces existe ζ' raíz de f con $\zeta - \zeta' = \underline{X}^{\lambda_{i+1}} U'$. Por lo tanto tendremos que $\eta - \zeta' = \eta - \zeta + \zeta - \zeta' = \underline{X}^\delta U + \underline{X}^{\lambda_{i+1}} U'$. Como η y ζ' son comparables forzosamente $\delta \leq \lambda_{i+1}$ y tendremos que $\lambda_1 < \dots < \lambda_i \leq \delta < \lambda_{i+1} < \dots < \lambda_g$.

Nótese que si ζ'' es otra raíz de f entonces $\eta - \zeta'' = \underline{X}^\delta U + \underline{X}^{\lambda_k} U''$ y por lo tanto si $\delta > \lambda_i$ se tiene que o bien $k(\eta, \zeta'') = \lambda_k$ si $k < i$ o bien $k(\eta, \zeta'') = \delta$ si $k > i$, en particular $\delta = \max\{k(\eta, \zeta) \mid f(\zeta) = 0\}$.

Si tenemos que $\delta = \lambda_i$ entonces puede ocurrir que existe ζ'' tal que $k(\eta, \zeta'') = \delta' < \delta$, pero lo que siempre ocurre es que:

- Existe $\max\{k(\eta, \zeta) \mid f(\zeta) = 0\} = \delta$.
- $\{k(\eta, \zeta) \mid f(\zeta) = 0\} \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_g\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_g, \delta\}$. \square

Como consecuencia si h es irreducible y mónico con $\mathcal{R}(h) \subset \widetilde{R}_d$ y comparable con f entonces el conjunto

$$\{k(\eta, \zeta) \mid \zeta \in \mathcal{R}(f), \eta \in \mathcal{R}(h) \cup \mathcal{R}(f), \eta \neq \zeta\}$$

es totalmente ordenado. Lo que no es cierto es que dos raíces $\eta, \eta' \in \mathcal{R}(h)$ sean comparables, esto es lo que las diferencia de $h \in RC_f$.

Nota 2.2. Sea f polinomio casi-ordinario irreducible con $f(\zeta) = 0$ y sea h mónico irreducible con $h(\eta) = 0$ y $\eta \in \widetilde{R}_d$, son equivalentes:

1. η es comparable con todas las raíces de f .
2. h es comparable con f .
3. ζ comparable con todas las raíces de h .

Definición 2.1.8. Sea $j = 0, \dots, g-1$. Una j -semi raíz de f es un polinomio casi-ordinario irreducible, $q_j \in \mathbb{C}[[\underline{X}]][[Y]]$, de grado $n_0 \cdots n_j$ y que tiene orden de coincidencia λ_{j+1} con f .

En función de los resultados anteriores podemos enunciar:

Proposición 2.1.9. (Proposition 3.2 en [52]) Para cada $j = 1, \dots, g-1$ consideramos $q \in \mathbb{C}[[\underline{X}]][[Y]]$ un polinomio casi-ordinario irreducible de grado $n_0 \cdots n_j$. Las siguientes propiedades son equivalentes:

- (1) q tiene orden de coincidencia λ_{j+1} con f .

(2) $Res_Y(f, q) = X^{\bar{\gamma}_{j+1}}U_j$, con $U_j \in \mathbb{C}[[\underline{X}]]$ una unidad.

(3) $q(\zeta) = X^{\gamma_{j+1}}U_j$, con $U_j \in \mathbb{C}[[M_g \cap \mathbb{Q}_+^d]]$ una unidad.

Sea $\zeta = \sum c_\lambda \underline{X}^\lambda$ una raíz de f y pongamos que $\zeta = p_0 + \dots + p_g$ (ver 1.4). Es claro que $\eta_j = p_0 + \dots + p_j$ es una rama casi-ordinaria con exponentes característicos $\lambda_1 < \dots < \lambda_j$ y por la Definición 1.1.1 su polinomio mínimo q_j es casi-ordinario, tiene grado $n_0 \dots n_j$ y el orden de coincidencia $k(q_j, f)$ es λ_{j+1} . Por lo tanto, para cada $j = 0, \dots, g-1$, existe una j -semi raíz. Completamos la familia tomando $q_g = f$.

Nótese que las j -semi raíces de f q_0, \dots, q_{g-1} son polinomios casi ordinarios y comparables con f por lo tanto son estrictamente comparables con f ; es decir, $q_j f$ es un polinomio casi-ordinario. Como consecuencia se tiene que el semigrupo de f se puede obtener evaluando solamente polinomios mónicos estrictamente comparables con f , ya que los exponentes dominantes de las semi raíces proporcionan un sistema de generadores del semigrupo. Es decir,

$$\Gamma_g(f) = \{v(h) \mid h \in RC_f\}.$$

La siguiente propiedad, descrita en [88, Lemma 7.2], nos muestra como escribir cualquier polinomio $h \in R_d[Y]$ en términos de las semi-raíces de la componente f . Denotamos por $deg(h)$ su grado (como polinomio en Y).

Lema 2.1.10. *Todo elemento $h \in \mathbb{C}[[\underline{X}]] [Y]$ puede ser escrito de manera única como suma de la forma, $h = \sum c_{j_0, \dots, j_g} (q_0)^{j_0} \dots (q_g)^{j_g}$ con $c_{j_0, \dots, j_g} \in \mathbb{C}[[\underline{X}]]$, y las $(g+1)$ -uplas $(j_0, \dots, j_g) \in \mathbb{N}^{g+1}$ verifican que $0 \leq j_k \leq n_{k+1} - 1$, $\forall k \in \{0, \dots, g-1\}$, y $j_g \leq [deg(h)/n]$.*

Demostración: Mediante divisiones Euclídeas iteradas por q_g obtenemos el desarrollo q_g -ádico de h , es decir

$$h = c_0 + c_1 q_g + \dots + c_{k_g} q_g^{k_g}$$

con $k_g \leq [deg(h)/deg(q_g)]$ y $c_i \in \mathbb{C}[[\underline{X}]] [Y]$, con $deg(c_i) < deg(q_g) = n$ para $i = 0, \dots, k_g$. Procediendo de esta misma forma con cada uno de los coeficientes y el polinomio q_{g-1} e iterando este proceso obtenemos que h con las condiciones requeridas se escribe como una suma finita $h = \sum c_{j_0, \dots, j_g} (q_0)^{j_0} \dots (q_g)^{j_g}$.

La unicidad es consecuencia del hecho que los grados en Y de los términos $c_{j_0, \dots, j_g} (q_0)^{j_0} \dots (q_g)^{j_g}$ son dos a dos distintos. Supongamos que existen $(k_0, \dots, k_g) \neq (j_0, \dots, j_g)$ tal que,

$$deg(c_{k_0, \dots, k_g} (q_0)^{k_0} \dots (q_g)^{k_g}) = deg(c_{j_0, \dots, j_g} (q_0)^{j_0} \dots (q_g)^{j_g}).$$

Entonces existe $p \in \{0, \dots, g\}$ tal que $k_l = j_l, \forall l > p$, y $k_p \neq j_p$. Supongamos por ejemplo que $k_p > j_p$. Entonces,

$$(k_p - j_p)n_1 \cdots n_p = \sum_{l=1}^{p-1} (j_l - k_l)n_1 \cdots n_l \leq \sum_{l=0}^{p-1} (n_{l+1} - 1)n_1 \cdots n_l = n_1 \cdots n_p - 1,$$

y por tanto $k_p - j_p < 1$, lo cual es absurdo. \square

La expresión descrita en el lema anterior para h se llama el desarrollo (q_0, \dots, q_g) -ádico de h . La propiedad siguiente puede ser encontrada en [88, Lemma 7.4], y es una consecuencia directa de la escritura única del semigrupo descrita en el apartado (5) de la Proposición 2.1.2.

Lema 2.1.11. *Sea ζ una raíz de f y $h = \sum c_{j_0, \dots, j_g} (q_0)^{j_0} \cdots (q_g)^{j_g}$ el desarrollo $(q_0 \cdots q_g)$ -ádico de $h \in R$. Entonces se verifica que los conjuntos de vértices de los polígonos de Newton $\partial \mathcal{N}_\zeta(c_{j_0, \dots, j_g} (q_0)^{j_0} \cdots (q_g)^{j_g})$ son disjuntos dos a dos cuando (j_0, \dots, j_g) varía a lo largo del soporte del desarrollo $(q_0 \cdots q_g)$ -ádico de h .*

P. González Pérez da una definición un poco más general de semigrupo. En vez de evaluar sólo algunas de las funciones de R se evalúa en todas, y cuando el poliedro de Newton no se reduce a un punto (es decir en el caso de funciones no comparables) se consideran como elementos del semigrupo todos aquellos vértices que aparecen explícitamente en el polígono, más precisamente se considera el semigrupo:

$$\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = \{\gamma \in \mathbb{Q}_+^d \mid \exists h \in R \text{ con } \gamma \in \partial \mathcal{N}_\zeta(h) \cap \text{sop}(h(\zeta))\}.$$

Nótese que a partir de los lemas anteriores se tiene en primer lugar que los vértices del polígono de Newton de $h(\zeta)$ que están en el soporte de $h(\zeta)$ son los de los polígonos de cada uno de los sumandos del desarrollo (q_0, \dots, q_g) -ádico. Puesto que el polígono de Newton de $q_0(\zeta)^{j_0} \cdots q_{g-1}(\zeta)^{j_g}$ se reduce a un punto, para cada uno de los sumandos del desarrollo de h los vértices de su polígono que están en el soporte se obtienen a partir de polinomios que son comparables con f (de hecho estrictamente comparables). Por tanto como una consecuencia inmediata de los dos últimos lemas se tiene:

Teorema 2.1.12. *Los semigrupos $\Gamma_g(f)$ y $\Gamma_{\mathcal{N}}(f)$ coinciden.*

Por lo tanto tendremos que se obtiene el mismo semigrupo tomando cualquiera de los conjuntos, ya sea tomando todos los vértices efectivos de los polígonos de Newton de las clases de todos los polinomios mónicos en R o

tomando los exponentes dominantes de los polinomios estrictamente comparables, comparables o racionalmente comparables.

En el Capítulo 3 usaremos un resultado que es clave en nuestro desarrollo, este resultado dice que la normalización de cualquier singularidad casi-ordinaria es una variedad tórica. Aunque no vamos a entrar en detalles en este resultado si parece oportuno estudiar la normalización de una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible, o lo que es equivalente el cierre entero de $R = R_d[\zeta]$. Aunque primero vamos dar algún concepto previo.

Definición 2.1.13. Sea M un \mathbb{Z} -módulo libre finitamente generado (un retículo), sea Δ un subsemigrupo de M , y $G(\Delta)$ el \mathbb{Z} -submódulo de M generado por Δ . El subsemigrupo $\cup_{t \in \mathbb{N}} (\frac{1}{t}\Delta) \cap G(\Delta)$ de M se llama la **saturación** de Δ , y la denotamos por $\overline{\Delta}$. Se dice que Δ es **saturado** si $\overline{\Delta} = \Delta$.

Denotemos por \overline{R} al cierre entero de R y por $\overline{\Gamma}$ la saturación de Γ . El siguiente resultado (ver [70]) da una descripción explícita de \overline{R} .

Proposición 2.1.14.

- (1) \overline{R} es el cierre entero de $R_d[\underline{X}^{\gamma_1}, \dots, \underline{X}^{\gamma_g}]$.
- (2) Un elemento $z \in R_{d,n}$ esta en \overline{R} si y solo si $Sop(z) \subset \overline{\Gamma}_g$.
- (3) Sea $\Sigma = \{l_1\overline{\gamma}_1 + \dots + l_g\overline{\gamma}_g \mid 0 \leq l_i \leq n_i - 1, i = 1, \dots, g\}$ el conjunto de combinaciones lineales estrictas de $\overline{\gamma}_1, \dots, \overline{\gamma}_g$, y sea $\Sigma' := \{s \bmod n \mid s \in \Sigma\}$. Entonces $\{\underline{X}^{s/n} \mid s \in \Sigma'\}$ es un sistema de generadores de \overline{R} como R_d -módulo, es más $\#(\Sigma') = n$.

Demostración: Nótese que $L_d(\zeta) = L_d[\underline{X}^{\gamma_1}, \dots, \underline{X}^{\gamma_g}]$, y que a su vez por la Proposición 1.1.11 sabemos que $L_d[\underline{X}^{\gamma_1}, \dots, \underline{X}^{\gamma_g}] = L_d[\underline{X}^{\lambda_1}, \dots, \underline{X}^{\lambda_g}]$.

- (1) Puesto que \overline{R} es el cierre entero de R_d en $L_d(\zeta)$, tenemos que $\overline{R} = L_d(\zeta) \cap R_{d,n}$, pero como $\underline{X}^{\gamma_1}, \dots, \underline{X}^{\gamma_g}$ son enteros sobre R_d y están en $L_d(\zeta)$, la hipótesis se deduce de que $L_d(\zeta) = L_d[\underline{X}^{\gamma_1}, \dots, \underline{X}^{\gamma_g}]$.
- (2) Como $R_{d,n}$ es íntegramente cerrado, sabemos que $L[\underline{X}^{\gamma_1}, \dots, \underline{X}^{\gamma_g}] \cap R_{d,n}$ es el cierre integro de $R_d[\underline{X}^{\gamma_1}, \dots, \underline{X}^{\gamma_g}]$. Sea $z \in R_{d,n}$, tenemos que $z \in L[\underline{X}^{\gamma_1}, \dots, \underline{X}^{\gamma_g}]$ si y solo si $r \in M_g$ para todo $r \in Sop(z)$, luego $z \in M_g \cap \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$. Pero no es difícil probar gracias a las propiedades del semigrupo que la saturación de Γ_g es $\overline{\Gamma}_g = \{r \in M_g \mid r > 0\}$.

- (3) Sea $z \in \bar{R}$ un elemento no nulo tal que $r \in \text{Sop}(z)$. Por (2) sabemos que $r \in \bar{\Gamma}_g$, y por lo tanto podemos escribir $r = na_0 + s$ donde $a_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ y $s \in \Sigma'$. Luego, $z = \sum_{s \in \Sigma'} f_s X^{s/n}$ donde $f_s \in R_d$ para todo $s \in \Sigma'$, es decir, $\{X^{s/n} \mid s \in \Sigma'\}$ es un sistema de generadores de \bar{R} como R_d -módulo, además esto implica que $\#\Sigma' \geq n$. Por otra parte según las propiedades (3) y (4) de la proposición 2.1.2 sabemos que $\#\Sigma' \leq n$.

□

Pedro González en su tesis (ver [48]) da una demostración alternativa en términos de geometría tórica. Igualmente Patrick Popescu-Pampu (ver [85]), además de demostrar que $\bar{R} = \mathbb{C}[[\bar{\Gamma}_g]]$, da un algoritmo para calcular la normalización de un germen de hipersuperficie casi-ordinaria.

Una vez conocido el saturado de Γ_g , $\bar{\Gamma}_g = M_g \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^d$, podemos introducir el conductor de Γ_g como vemos seguidamente.

Definición 2.1.15. *El conjunto conductor es el conjunto de elementos $c \in \Gamma_g$ verificando que, para todo $\gamma \geq c$ con $\gamma \in \bar{\Gamma}_g$ se tiene que $\gamma \in \Gamma_g$. Cada uno de sus elementos se llama un conductor.*

Nota 2.3. La defunción anterior es equivalente a decir que c es un conductor si y sólo si $c + \bar{\Gamma}_g \subset \Gamma_g$. Es por lo tanto el conductor del semigrupo $\bar{\Gamma}_g$ en el semigrupo Γ .

El elemento $n_g \gamma_g \in \Gamma$ es claramente un conductor, luego el conjunto conductor es no vacío. Sin embargo, al contrario que en el caso de curvas no necesariamente el conjunto conductor tiene un mínimo y por lo tanto el conjunto conductor no es necesariamente de la forma $c + \bar{\Gamma}_g$.

2.2. Caso Reducible

Sea $(S, 0)$ una singularidad de hipersuperficie casi-ordinaria definida por el polinomio casi-ordinario de grado n , $f = \prod_{i=1}^r f_i$. Cada uno de los factores irreducibles, f_i , define una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible, $S_i = \{f_i = 0\}$, además $f_i \neq f_j$ si $i \neq j$. Denotaremos por n^i el grado de f_i , $i = 1, \dots, r$. Evidentemente $n = \sum_{i=1}^r n^i$. Para cada $i = 1, \dots, r$ denotamos por $\zeta_i \in R_{d, n^i}$ una raíz de f_i .

Generalizando las notaciones del caso irreducibles, para cada $i = 1, \dots, r$ denotamos por, λ_j^i con $j = 1, \dots, g_i$ a los exponentes característicos de f_i y por $\Gamma_j^i = \mathbb{Z}_{\geq 0}^d + \sum_{k=1}^j \gamma_k^i \mathbb{Z}_{\geq 0}$ (resp. $M_j^i = \langle \Gamma_j^i \rangle$) el j -ésimo semigrupo (resp. retículo) asociado a f_i , siendo e_j^i el orden de M_{j-1}^i en M_j^i y $n_j^i = e_{j-1}^i / e_j^i$.

Denotaremos el retículo $M_{g_i}^i$ simplemente por M^i y utilizaremos la notación M_+^i para indicar $M_+^i := M^i \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}^d$.

Las nociones de polinomio comparable, racionalmente comparable y estrictamente comparable se extienden sin dificultad al caso no irreducible. Así, para cada $i = 1, \dots, r$ y $h \in R$ denotamos por $v_i(h)$ al orden de $h(\zeta_i)$ (si existe), y por

$$C_f = \{h \in R \mid h \text{ mónico}, \exists \underline{v}(h) = (v_1(h), \dots, v_r(h))\} \quad (2.6)$$

al conjunto de funciones **comparables** con f .

Proposición 2.2.1. *Sea h un germen que es comparable con f , entonces $\text{Res}(h, f_1 \cdots f_r) = \prod_{i=1}^r \text{Res}(h, f_i) = \underline{X}^{\deg(f_1)v_1(h) + \dots + \deg(f_r)v_r(h)} U$, con $U(0) \neq 0$, es más,*

$$C_f = \{h \in R \mid h \text{ mónico}, \text{Res}(h, f) = \underline{X}^\delta \cdot U, U(0) \neq 0, \delta \in \mathbb{Z}^d\}.$$

El conjunto de gérmenes que son **estrictamente comparables** con f es el conjunto

$$RC_f = \{h \in \mathbb{C}[[X]][[Y]] \mid h \text{ mónico y } fh \text{ es casi-ordinaria}\}. \quad (2.7)$$

Finalmente un polinomio $h \in R$ es **racionalmente comparable** con f si lo es con cada uno de sus factores f_1, \dots, f_r y denotaremos por \hat{C}_f al conjunto de los mismos.

Sea h irreducible tal que $\mathcal{R}(h) \subset R_{d,m} \subset \widetilde{R}_d$. En estas condiciones se tiene el siguiente resultado acerca de los ordenes de contacto.

Proposición 2.2.2. *Si f, h son racionalmente comparables, entonces el conjunto $\{k(h, f_i); i = 1, \dots, r\}$ es totalmente ordenado. En particular existe $\text{máx}\{k(h, f_i); i = 1, \dots, r\}$.*

Demostración: Supongamos que $k(h, f_i) = \alpha = k(\eta, \zeta_i)$ y $k(h, f_j) = \beta = k(\eta', \zeta_j)$ con α y β no comparables. Entonces $\eta - \zeta_i = \underline{X}^\alpha U$ y $\eta' - \zeta_j = \underline{X}^\beta U'$. Si tomamos $\sigma \in \text{Gal}(L_{d,n}/L_d)$ tal que $(\eta')^\sigma = \eta$ entonces $\eta - \zeta_j^\sigma = \underline{X}^\beta U''$ y como en la Proposición 2.1.5 tendríamos que $\zeta_i - \zeta_j^\sigma = (\eta - \zeta_j^\sigma) - (\eta - \zeta_i) = \underline{X}^\beta U'' - \underline{X}^\alpha U$ no tiene término dominante, lo cual es absurdo ya que son raíces de un polinomio casi-ordinario. \square

Tenemos por tanto tres conjuntos de polinomios “evaluables”: $RC_f \subseteq \hat{C}_f \subseteq C_f$. En el Ejemplo 2.1 veíamos que $RC_f \subsetneq C_f$, pero también es un claro ejemplo de que $RC_f \subsetneq \hat{C}_f$. A continuación damos un ejemplo donde se muestra que $\hat{C}_f \subsetneq C_f$. Por lo tanto tendremos que las contenciones entre los tres son estrictas:

$$RC_f \subsetneq \hat{C}_f \subsetneq C_f .$$

Ejemplo 2.2. 1. Sea $f = Y^2 - X_1X_2$ y sea $g = Y^2 - X_1X_2(X_1 + X_2)$. Una raíz de f es $\zeta = X_1^{1/2}X_2^{1/2}$, luego $g(\zeta) = X_1X_2U$, con U unidad. Esto prueba que $h \in C_f$. Por otra parte las raíces de h son de la forma $\eta_1 = \sqrt{X_1X_2}\sqrt{X_1 + X_2}$ y $\eta_2 = -\sqrt{X_1X_2}\sqrt{X_1 + X_2}$. Veamos que $\eta_1 \notin R_{d,n}, \forall n$. Basta probar que no existen n y $h \in R_{d,n}$ tal que $h^2 = X_1 + X_2$, es decir, $\eta = (X_1 + X_2)^{1/2} \notin R_{d,n}$. Razonando por reducción al absurdo supongamos que existe n tal que $\eta \in R_{d,n}$.

Sabemos que existe un m tal que $\eta \in L_{d,m}$ y que la extensión $L_d \subset L_{d,m}$ es abeliana luego el grupo de Galois $G = Gal(L_{d,m}/L_d)$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_m \times \dots \times \mathbb{Z}_m$, por lo tanto las raíces del polinomio mínimo de η se conjugan por la acción de G . Podemos suponer (por conveniencia) que m es impar, ya que siempre es posible encontrar una extensión más grande con m impar. También sabemos que el orden del grupo $[L_d(\eta)/L_d] = 2$ ya que el polinomio mínimo es $Y^2 - X_1X_2 = 0$. De todo ello se deduce que si existe n tal que $\eta \in R_{d,n}$ necesariamente este $n = 2$. Por una parte η y $-\eta$ son las raíces del polinomio mínimo, que cuando se conjugan por G también salen $(X_1 - X_2)^{1/2}$ y $(-X_1 + X_2)^{1/2}$ que no son raíces de $Y^2 - (X_1 + X_2)$, luego absurdo.

2. Veamos a continuación otro ejemplo con f reducible. Sea $f = Y(Y - X_1)$ y $h = Y^2 + Y(X_1 - X_2) + X_1X_2$. Por una parte h tiene valor en el semigrupo ya que $h(0) = X_1X_2$ y $h(X_1) = X_1^2U$. Por otra parte h no tiene raíces fraccionarias ya que sus raíces son $\zeta = \frac{-(X_1 - X_2) \pm \sqrt{X_1^2 + X_2^2 - 6X_1X_2}}{2} \notin R_{d,n}$ para todo n , esto se prueba como antes.

Podemos dar, en función de los tres conjuntos anteriores tres nociones (en principio diferentes) de semigrupo para el caso de varias componentes irreducibles. A ellas se puede añadir la extensión natural de la construcción de P. González basada en los polígonos de Newton.

Definición 2.2.3. Consideramos los siguientes subsemigrupos aditivos de $\mathbb{Q}_{n^1}^d \times \dots \times \mathbb{Q}_{n^r}^d$:

$$S_1(f) = \{\underline{v}(h) \mid h \in RC_f\}.$$

$$S(f) = \{\underline{v}(h) \mid h \in \hat{C}_f\}.$$

$$S_2(f) = \{\underline{v}(h) \mid h \in C_f\}.$$

$$S_3(f) = \{(s_1, \dots, s_r) \mid \exists h \in R \text{ con } s_i \in \partial\mathcal{N}_{\zeta_i}(h) \cap \text{sop}(h(\zeta_i)), \forall i = 1, \dots, r\}.$$

Evidentemente se tienen contenciones

$$S_1(f) \subset S(f) \subset S_2(f) \subset S_3(f).$$

Dedicaremos el resto de la sección esencialmente a estudiar las contenciones entre dichos semigrupos.

Proposición 2.2.4. $S(f) \neq S_2(f)$

Demostración: Sea $f = f_1 f_2$ casi-ordinario con $f_1 = Y^2 - X_1 X_2^2 X_3^2 X_4^2 X_5^2$ y $f_2 = Y^2 - X_1$. Consideramos el polinomio $g = Y^4 + Y^2(X_1 + X_2 X_2 X_3 X_4 X_5) - X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$, que tiene como soluciones

$$1/2 \sqrt{2X_2 X_3 X_4 X_5 - 2X_1 + 2 \sqrt{X_2^2 X_3^2 X_4^2 X_5^2 - 6X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 + X_1^2}}$$

y sus conjugadas, que $\notin \mathbb{C}[[\underline{X}^{1/n}]] \forall n$, porque $\sqrt{X_1 + X_2 X_3 X_4 X_5} \notin \mathbb{C}[[\underline{X}^{1/n}]]$ siguiendo la misma prueba que hicimos en el Ejemplo 2.2. Además, tiene valor en el semigrupo,

- $g(X_1^{1/2} X_2 X_3 X_4 X_5) = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 U$.
- $g(X_1^{1/2}) = X_1^2$.

Vamos a ver que no existen ningún germen mónico irreducible h con raíces fraccionarias tal que $v(h) = ((1, 1), (2, 0))$.

Sea $h = a_0(\underline{X}) + a_1(\underline{X})Y + \dots + a_{n-1}(\underline{X})Y^{n-1} + Y^n$ un polinomio genérico de grado n , e imponemos las condiciones pedidas. Como $v_1(h) = (1, 1)$ tenemos que $h(X_1^{1/2} X_2 X_3 X_4 X_5) = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 U$ por otra parte también es igual a $a_0(\underline{X}) + a_1(\underline{X})X_1^{1/2} X_2 X_3 X_4 X_5 + a_2(\underline{X})X_1(X_2 X_3 X_4 X_5)^2 + \dots + X_1^{n/2}(X_2 X_3 X_4 X_5)^n$, se deduce que:

$$a_0(\underline{X}) = \begin{cases} X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 U' \\ 0 \end{cases} \quad y \quad a_1(\underline{X}) = \begin{cases} X_1 P_1(X) \\ 0 \end{cases}$$

Si $a_0(X) = a_1(X) = 0$ entonces $h(X_1^{1/2} X_2) = X_1^\alpha (X_2 X_3 X_4 X_5)^\beta U''$ con $\beta \geq 2$ lo que es absurdo y por tanto no pueden anularse a la vez. Si $a_0(X) = 0 \neq a_1(X)$ entonces $h(X_1^{1/2} X_2 X_3 X_4 X_5) = X_1^\alpha (X_2 X_3 X_4 X_5)^\beta U''$ con β o bien mayor que uno o bien no está en \mathbb{Q} , igualmente llegamos a un absurdo.

Falta por imponer la segunda condición $v_2(h) = (2, 0)$, significa que $h(X_1^{1/2}) = X_1^2 U = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 U' + X_1 P_1(\underline{X}) X_1^{1/2} + a_2(\underline{X}) X_1 + \dots + X_1^{n/2}$, donde en principio $P_1(X)$ puede ser cero. Se deduce que,

$$a_0(\underline{X}) = X_2 X_3 X_4 X_5 U'' + X_1 P_2(X), \text{ con } U' = -U'' \text{ y}$$

$$P_1(\underline{X}) = \begin{cases} X_1 P_1'(X) \\ 0 \end{cases}$$

Nótese que o bien $P_2(X)$ o bien $a_4(X)$ es una unidad. Luego tenemos que $h(X) = X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 U' + X_1^2 P_1'(\underline{X}) Y + (X_2 X_3 X_4 X_5 U'' + X_1 P_2(X)) Y^2 + \dots + Y^n$, con $n \geq 3$ para que sea mónico.

Veamos que no tiene raíces fraccionarias. Supongamos que existe $\zeta = \sum \alpha_i M_i \in R_{d,n}$ raíz de h , entonces aplicamos el algoritmo de Newton generalizado, ver sección 1.1. El primer monomio de ζ , M_1 , se calcula como la raíz n -ésima del monomio dominante del término independiente de h , es decir, $M_1 = X_1^{\frac{1}{n}} X_2^{\frac{1}{n}} X_3^{\frac{1}{n}} X_4^{\frac{1}{n}} X_5^{\frac{1}{n}}$ y $\alpha_1 = (-U)^{1/n}$.

Si $n > 2$, $\zeta = \alpha_1 X_1^{\frac{1}{n}} X_2^{\frac{1}{n}} X_3^{\frac{1}{n}} X_4^{\frac{1}{n}} X_5^{\frac{1}{n}} + \dots$, donde $n_1 = n$ y $e_2 = 1$. Se hace el cambio $Y = Y_1 + \alpha_1 M_1$ en h obteniendo

$$h_1 = (X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 U') + X_1^2 P_1(\underline{X})(Y_1 + \alpha_1 M_1) + (X_2 X_3 X_4 X_5 U'' + X_1 P_2(\underline{X}))(Y_1 + \alpha_1 M_1)^2 + \dots + (Y_1 + \alpha_1 M_1)^n.$$

Agrupando términos nos interesa quedarnos con el término independiente, que es

$$A_{n,1} = a_{n-1}(\underline{X}) \alpha_1^{n-1} M_1^{n-1} + \dots + (X_2 X_3 X_4 X_5 U'' + X_1 P_2(\underline{X})) \alpha_1^2 M_1^2 + X_1^2 P_1(\underline{X}) (\alpha_1 M_1) + X_1^2 X_2 X_3 X_4 X_5 U'.$$

Se verifica que

$$LM(A_{n,1}) = \begin{cases} \alpha_1^2 X_1 M_1^2 = M_1^{n-1} M_2, \text{ si } a_4(X) \neq U, \\ \alpha_1^4 M_1^4 = M_1^{n-1} M_2, \text{ si } P_2(X) \neq U. \end{cases}$$

En el primer caso, no tiene como factor a M_1^{n-1} salvo que $n = 3$. Si $n = 3$, $M_2 = X_1$ lo que implica que $n_1 = n, n_2 = n \Rightarrow e_0 = n_1 n_2 = n^2$ absurdo ya que $e_0 = \deg(h) = n$. En el segundo caso, $n = 5$, $M_2 = U$, luego $\zeta = M_1 + M_2 = U'$, absurdo no puede ser una unidad. \square

Con vistas a probar la igualdad de los semigrupos S_f y $S_1(f)$ precisamos algunos resultados referidos al caso en que f es irreducible. Por tanto, en los párrafos siguientes asumiremos de nuevo que f es irreducible.

Proposición 2.2.5. *Sea f un polinomio casi-ordinario irreducible, $h \in \hat{C}_f$ un polinomio irreducible racionalmente comparable con f y $k(h, h)$ el orden de coincidencia. Sea q tal que $\lambda_q < k(h, f) \leq \lambda_{q+1}$. Entonces se tiene que*

$$v(h) = \frac{\rho(h, f)}{\deg(f)} = \frac{\deg(h)}{\deg(f)} \left(e_q k(h, f) + \sum_{k=1}^q (e_{k-1} - e_k) \lambda_k \right). \quad (2.8)$$

Demostración: Sean $\mathcal{R}(h) = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ y $\mathcal{R}(f) = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ las raíces de h y f que supondremos contenidas en $L_{d,p}$. Puesto que $R(f, h) = \prod_{i=1}^m f(\eta_i)$, los elementos $f(\eta_i) \in R_{d,p}$ tienen todos ellos monomio dominante y además es independiente de la raíz elegida η_i , ya que son conjugados por el grupo de Galois de la extensión y éste no modifica los grados. Pongamos entonces $f(\eta) = \prod_{j=1}^n (\zeta_j - \eta) = \underline{X}^\alpha U$ para $\eta \in \mathcal{R}(h)$ cualquiera, U unidad en $R_{d,p}$. Por tanto tendremos que $\rho(f, h) = m\alpha$ y procederemos a calcular $\alpha = \sum_{j=1}^n k(\zeta_j, \eta)$.

Supongamos que $\gamma = k(f, h) = k(\eta, \zeta_1)$ y escribimos $\zeta_1 = \sum_u c_u \underline{X}^u$, $\eta = \sum_u d_u \underline{X}^u$. Nótese que $\sum_{u \not\geq \gamma} c_u \underline{X}^u = \sum_{u \not\geq \gamma} d_u \underline{X}^u$. Entre las $n = e_0$ raíces conjugadas de f sabemos que para cada $i = 1, \dots, g$ hay exactamente e_i raíces que dejan fijos los coeficientes de los monomios con exponentes $\lambda_1, \dots, \lambda_i$. Por lo tanto tendremos que $k(\zeta_i, \eta) = \gamma$ para e_q raíces distintas ζ_i de f y para cada $i = 1, \dots, q$ tendremos que $k(\zeta_i, \eta) = \lambda_i$ para $e_{i-1} - e_i$ raíces distintas ζ_i . Como consecuencia

$$\frac{\rho(h, f)}{\deg(h)} = \alpha = \sum_{j=1}^n k(\zeta_j, \eta) = e_q k(h, f) + \sum_{k=1}^q (e_{k-1} - e_k) \lambda_k.$$

□

La fórmula anterior es conocida en el caso en que $h \in RC_f$ y se debe a Evelia García y Pedro González (ver [45]). Es claro que en este caso podemos referir la fórmula anterior a los datos de la hipersuperficie casi-ordinaria h . En efecto, puesto que $\lambda_q < k(h, f) \leq \lambda_{q+1}$ se tiene que $\lambda_i^h = \lambda_i$, $\gamma_i^h = \gamma_i$, $n_i^h = n_i$ para $i = 1, \dots, q$. Por tanto también $e_i^h \deg(f) = e_i \deg(h)$ para $i = 0, 1, \dots, q$ y

$$\frac{\rho(h, f)}{\deg(f)} = e_q^h k(h, f) + \sum_{k=1}^q (e_{k-1}^h - e_k^h) \lambda_k^h; \quad (2.9)$$

donde por $\lambda_j^h, e_j^h, \gamma_j^h, \dots$ denotamos los correspondientes datos de h .

También es posible escribir las fórmulas anteriores en función de los generadores del semigrupo, siguiendo el paralelismo con el caso de curvas planas (ver [31]):

$$\frac{\rho(h, f)}{\deg(f)} = \gamma_q^h e_{q-1}^h - \lambda_q^h e_q^h + k(h, f) e_q^h = \frac{\deg(h)}{\deg(f)} e_q (k(h, f) - \lambda_q + n_q \gamma_q) \quad (2.10)$$

Definición 2.2.6. Sea $\eta = \sum a_\lambda \underline{X}^\lambda \in R_{d,n}$. Decimos que η^δ es una **truncación** de η a nivel $\delta \in \mathbb{Q}^d$ si $\eta^\delta = \sum_{\lambda \not\geq \delta} a_\lambda \underline{X}^\lambda + a_\delta \underline{X}^\delta$.

Sea $h \in \hat{C}_f$ un germen irreducible que tiene valor en el semigrupo con raíz η y η^δ una truncación de η a nivel δ . El polinomio mínimo h^δ de η^δ decimos también, abusando del término, que es una truncación de h a nivel δ

Nota 2.4. Obsérvese que en la escritura $\eta = \sum_{\lambda \not\geq \delta} a_\lambda \underline{X}^\lambda + a_\delta \underline{X}^\delta$, es posible que $a_{\delta=0}$ (si lo es en η).

Proposición 2.2.7. *Sea f un polinomio casi-ordinario irreducible y $h \in \hat{C}_f$ un germen irreducible con $k(f, h) = \delta$. Entonces $\deg(h^\delta)$ divide a $\deg(h)$ y*

$$v(h) = \frac{\deg(h)}{\deg(h^\delta)} v(h^\delta).$$

Demostración: Sean $\eta, \eta^\delta \in L_{d,m}$ raíces de h y h^δ respectivamente. Puesto que cualquier extensión intermedia de la extensión de Galois $L_d \subset L_{d,m}$ es de la forma $L_d[\underline{X}^{r_1/m}, \dots, \underline{X}^{r_k/m}]$ (véase, por ejemplo, (1.7), Capítulo V de [70]) se tiene que

$$L_d \subset L_d(\eta^\delta) \subset L_d(\eta) \subset L_{d,m}.$$

Luego $\deg(h) = [L_d : L_d(\eta)] = \deg(h^\delta)[L_d(\eta^\delta) : L_d(\eta)]$.

Puesto que $k(h, f) = k(h^\delta, f) = \delta$, de la fórmula (2.8) para h y h^δ se deduce que $v(h) = \frac{\deg(h)}{\deg(h^\delta)} v(h^\delta)$. \square

Si suponemos que $f = \prod_{i=1}^r f_i$ es casi-ordinario y reducible, entonces cada para cada germen irreducible h y cada componente irreducible f_i podemos considerar $k(h, f_i)$. Denotamos por $k_h = \max\{k(h, f_i) : i = 1, \dots, r\}$.

Teorema 2.2.8. *Sea $f = \prod_{i=1}^r f_i$ un polinomio casi-ordinario con r componentes irreducibles f_1, \dots, f_r . Entonces $S(f) = S_1(f)$.*

Demostración: Puesto que la inclusión $S(f) \subset S_1(f)$ es clara, veamos la otra inclusión. Sea $h \in \hat{C}_f$ tal que para cada $i = 1, \dots, r$ existe $v_i(h)$. Supongamos que $k_h = k(h, f_1)$ y tomamos h' la truncación de h a nivel k_h , es claro que $h' \in RC_f$. Hay que probar que para $i = 1, \dots, r$ existe $m \in \mathbb{N}$ de manera que $v_i(h) = m v_i(h')$.

Antes de continuar hagamos la siguiente observación. Sea ζ_i una raíz de f_i , sabemos que $v_i(h)$ es el exponente del monomio dominante de $h(\zeta_i)$ para todo i , que se escribe como $h(\zeta_i) = \prod_k (\zeta_i - \eta_k)$ con η_k las raíces de h . Pero como solo intervienen los exponentes $\lambda \not\geq k_h$, podemos eliminar todos los exponentes mayores que k_h , esto explica que la truncación por k_h es la mejor posible, es el sentido de que h' es el de grado mínimo con k_h fijado.

Por otra parte sean $(n_i^h)_{i=1}^s$ y $(n_i^{h'})_{i=1}^l$ las n -sucesiones de ζ_h y $\zeta_{h'}$ respectivamente. Ya vimos que la n -sucesión de ζ_h tiene sentido y se construye igual que la de h' (ver 1.3). Luego para $i = 1, \dots, l$ sabemos (por construcción) que $n_i^h = n_i^{h'}$. Por tanto $e_j^h = \prod_{k=j+1}^l n_k^{h'} \prod_{k=l+1}^s n_k^h = m e_j^{h'}$ para $j = 1, \dots, c(h', f_1)$ donde $m = \frac{\deg(h)}{\deg(h')}$. Luego de la ecuación (2.8) se deduce que $v_i(h') = m v_i(h) \quad \forall i$. Además por la Proposición 2.2.7 $m \in \mathbb{N}$. \square

Al igual que la Definición 2.2.3 es la generalización natural del semigrupo definido por Popescu-Pampu en [88] o Micus y Kiyek en [69] cuando se tiene una sola rama, también podemos tomar como definición la generalización del semigrupo definido por González Pérez en [52].

Definición 2.2.9. *Consideramos el semigrupo,*

$$S_3(f) = \{(s_1, \dots, s_r) \mid s_i \in \partial \mathcal{N}_i(h) \cap \text{sop}(h(\zeta_i)), \forall i, h \in R\}.$$

Proposición 2.2.10. *$S(f) \neq S_3(f)$, salvo que $r = 1$.*

Demostración: El caso $r = 1$ es consecuencia directa del Lema 2.1.11 y el Lema 2.1.10.

Consideramos un polinomio casi-ordinario con dos componentes irreducibles, dadas por las ecuaciones $f_1 = Y^3 - X_1^4 X_2^3$ y $f_2 = Y^2 - X_1 X_2$, que tienen por raíces $\zeta_1 = X_1^{4/3} X_2$ y $\zeta_2 = X_1^{1/2} X_2^{1/2}$ respectivamente.

Por otra parte consideramos $h = Y^4 - X_1 X_2^3$ y calculamos

$$h(\zeta_1) = X_1^{3/4} X_2^{9/4} - X_1^{16/4} X_2^{12/4} = X_1^{3/4} X_2^{9/4} U,$$

$$h(\zeta_2) = X_1^{2/4} X_2^{6/4} - X_1^{4/4} X_2^{4/4} = X_1^{2/4} X_2^{4/4} [X_2^{2/4} - X_1^{2/4}].$$

Por lo tanto se trata de ver que no existe ningún $H \in R$ tal que $H(\zeta_1) = X_1^{3/4} X_2^{9/4} U'$ y $H(\zeta_2) = X_1^{2/4} X_2^{6/4} U''$, donde U' y U'' son unidades.

Supongamos que $H(\zeta_2) = X_1^{1/2} X_2^{3/2} U''$ y $\zeta_2 = X_1^{1/2} X_2^{1/2}$, la única posibilidad es que $H = X_1^{1/2} X_2^{3/2} U_0 + Y p_1(X_1, X_2) + Y^2 p_2(X_1, X_2) \dots$, donde U_0 unidad, $p_1(X_1, X_2) = X_2 p_1'(X_1, X_2)$ y $p_2(X_1, X_2) = X_2 p_2'(X_1, X_2)$.

Pero a su vez se ha de verificar que $H(X_1^{4/3} X_2) = X_1^{3/4} X_2^{9/4} U$ lo cual es imposible ya que $v_1(H) = (4/3, 6/3)$ que no es comparable con $(3/4, 9/4)$ y no se puede cancelar con ningún otro monomio. \square

Gau [47] y Lipman en [75] y [76], muestran que el semigrupo de valores determina el tipo topológico de la singularidad en el caso irreducible. Es una conjetura que el semigrupo de cada componente irreducible junto con los

órdenes de coincidencia entre pares de ramas determinan el tipo topológico de la singularidad.

Si somos capaces de recuperar los semigrupos de cada rama y los órdenes de coincidencia de pares de ramas, podríamos pensar que nuestro semigrupo está “bien definido” en el sentido que indica la conjetura. En cualquier caso son propiedades siempre deseables.

Denotamos por pr_i a la proyección i -ésima de $S(f)$, que manda a cada elemento $s = (s_1, \dots, s_r) \in S(f)$ en $pr_i(s) = s_i$.

Lema 2.2.11. *Fijado $i \in \{1, \dots, r\}$, existen q_1^i, \dots, q_{g-1}^i semi-raíces de f_i tal que $q_j^i \in RC_f \forall j = 0, \dots, g$.*

Demostración: Para no complicar la notación supongamos que $i = 1$ y que las semi-raíces son q_1, \dots, q_{g-1} . Sabemos que si $\zeta = p_0 + p_1 + \dots + p_g$ es una raíz de f_1 entonces el polinomio mínimo q_j de $\zeta_{q_j} = p_0 + p_1 + \dots + p_j$ es una semi raíz de f_1 , además los exponentes característicos de q_j son $\lambda_1, \dots, \lambda_j$ que es casi-ordinario.

Sabemos que el discriminante $\Delta_Y(fq_j) = \Delta_Y(f)\Delta_Y(q_j)Res(f, q_j)^2$, con $\Delta_Y(f)$ y $\Delta_Y(q_j)$ ambos con monomio dominante. Luego es suficiente con ver que $Res(f, q_j)$ también tiene monomio dominante, donde $Res(f, q_j) = \prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{n_1 \dots n_j} (\xi_k - \zeta_{q_j})$ y ξ_k, ζ_{q_j} son raíces de f y q_j respectivamente.

Si $f(\xi) = 0$ entonces $\xi - \zeta = (\xi - \zeta_{q_j}) + (\zeta_{q_j} - \zeta) = a_\delta \underline{X}^\delta + \dots + (\zeta_{q_j} - \zeta) = a_{\lambda_{j+1}} \underline{X}^{\lambda_{j+1}} + \dots$, pero además como ξ y ζ son comparables implica que δ y λ_{j+1} son comparables. Por tanto $(\xi - \zeta_{q_j})$ tiene monomio principal (son comparables) salvo que $\delta = \lambda_{j+1}$ y $a_\delta = a_{\lambda_{j+1}}$ en cuyo caso se cancela los monomios principales y a priori no sabemos que pasa.

Sea $I \subset \{1, \dots, r\}$ el subconjunto de índices tal que todas las raíces de f_i con $i \in I$ tienen exponentes característicos $\{\lambda_1^1, \dots, \lambda_j^1, \lambda_{j+1}^i, \dots, \lambda_{g_i}^i\}$, es decir, son coincidentes con los de f_1 hasta λ_j^1 y además les pedimos que verifiquen $\lambda_{j+1}^i > \lambda_{j+1}^1$. Para cada $i \in I$ sea ξ^i una raíz de f_i . Como $\xi^i - \xi^k$ son comparables cuando $i, k \in I$, entonces $\lambda_{j+1}^i < \lambda_{j+1}^k$ (o viceversa). Si hacemos esto con todas llegamos a que $\lambda_{j+1}^1 < \lambda_{j+1}^{i_1} < \dots < \lambda_{j+1}^{i_t}$ con $I = \{i_1, \dots, i_t\}$.

Sea $M_j^1 = \mathbb{Z}^d + \lambda_1^1 \mathbb{Z} + \dots + \lambda_j^1 \mathbb{Z}$ y sea $\Lambda = \{\lambda \in M_j^1 \mid \lambda > \lambda_{j+1}^1, \lambda \not\geq \lambda_{j+1}^{i_t} \text{ y } \exists i \in I \text{ con } \lambda \in \text{sop}(\xi^{i_t})\}$. Consideramos $\zeta_{q_j} = p_0 + \dots + p_j + \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \underline{X}^\lambda$ con a_λ el mismo coeficiente que aparece en ξ^{i_t} . Es claro que ζ_{q_j} es una j -semi raíz de f_1 ya que $\zeta_{q_j} - \zeta = \underline{X}^{\lambda_{j+1}^1} U$. Para cada $i \in I$ consideramos $\delta = \min\{k(f_i, f_{i_t}), \lambda_{j+1}^{i_t}\}$, se tiene que $\{\lambda \in \Lambda \mid \lambda > \lambda_{j+1}^1 \text{ y } \lambda \not\geq \delta\} = \{\lambda \in M_j^1 \cap \text{sop}(\zeta^i) \mid \lambda > \lambda_{j+1}^1 \text{ y } \lambda \not\geq \delta\}$ porque $\{\delta\} \cup \{\lambda_{j+1}^1, \lambda_{j+1}^{i_1}, \dots, \lambda_{j+1}^{i_t}\}$ es totalmente ordenado. Por lo tanto $\xi^i - \zeta = \underline{X}^\delta U$. \square

Para $i = 1, \dots, r$ sea $\Gamma^i = \Gamma_{g_i}^i$ el semigrupo de la hipersuperficie casi-ordinaria irreducible definida por f_i . Es evidente que se tiene $S(f) \subset \Gamma^1 \times \dots \times \Gamma^r$. Consideramos la proyección i -ésima $pr_i : \Gamma^1 \times \dots \times \Gamma^r \rightarrow \Gamma^i$.

De la misma forma, si $J \subset I := \{1, \dots, r\}$ denotamos por $f_J = \prod_{i \in J} f_i$ el polinomio casi-ordinario formado por los polinomios irreducibles f_i , $i \in J$. Es también inmediato que para la proyección $pr_J : \Gamma^1 \times \dots \times \Gamma^r \rightarrow \prod_{j \in J} \Gamma^j$ se tiene también que $pr_J(S(f)) \subset S(f_J)$.

Proposición 2.2.12. *Sea $S(f)$ el semigrupo de la singularidad $(S, 0)$ con ecuación f y Γ^i el semigrupo de su componente i -ésima. Se tiene que,*

$$pr_i(S(f)) = \Gamma^i.$$

Demostración: Es suficiente probar que en la proyección está un conjunto de generadores de Γ^i , para ello basta demostrar que existe un conjunto completo de semi-raíces aproximadas de f_i que están en RC_f . Pero esto es el Lema 2.2.11. \square

Nota 2.5. Un razonamiento similar al anterior permite demostrar que para cualquier $J \subset I$ se tiene que $pr_J(S(f)) = S(f_J)$.

Nota 2.6. A continuación fijamos $i = 1$ y $j = 2, \dots, r$ y consideramos $k(f_1, f_j)$ el orden de coincidencia de las componentes irreducibles correspondientes. Por lo tanto, si fijamos $k_m = \min\{k(f_1, f_j), 1 < j \leq r\}$ los soportes de todas las raíces de todas las componentes coincidirán al hacer intersección con el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{Q}_n^d \mid \lambda \not\geq k_m\}$.

Esto significa que el semigrupo $S(f) \subset \Gamma^1 \times \dots \times \Gamma^r$ está en la diagonal hasta que alcanzamos k_m ; es decir, todas las coordenadas (entendiendo como tales las proyecciones en Γ^i) son iguales hasta el valor que corresponde a k_m .

Para cada índice $i = 1, \dots, r$ denotaremos por S_i el semigrupo de $f_{I-\{i\}} = f/f_i$.

Definición 2.2.13. *Diremos que un elemento $m \in S_i$ tiene **fibra infinita** si existe $\gamma \in \Gamma^i$ tal que*

$$\{\gamma' \in \Gamma^i \mid \gamma' \geq \gamma\} \subset pr_i((pr_{I-\{i\}})^{-1}(m)).$$

Nótese que en la definición se puede añadir la condición de que el elemento esté en el conductor de Γ^i . Es decir, la condición anterior es equivalente a decir que existe un elemento $\beta \in \Gamma^i$ tal que $\beta + M_+^i \subset pr_i((pr_{I-\{i\}})^{-1}(m))$, forzosamente β está en el conductor de Γ^i .

Para $i \in I$ denotaremos por $\xi^i \in S_i$ el resultado de evaluar el polinomio f_i , es decir, si $j \neq i$ entonces $\xi_j^i = v_j(f_i)$.

Proposición 2.2.14. *El elemento $\xi^i \in S_i$ tiene fibra infinita. Además es el menor elemento del semigrupo S_i que tiene fibra infinita.*

Demostración Sea $k_1 = \max\{k(f_1, f_j), 2 \leq j \leq r\}$, consideremos el polinomio h_λ definido como el polinomio mínimo asociado a la raíz casi-ordinaria $p_0^1 + \dots + p_{g_1}^1 + \underline{X}^\lambda$, con $\lambda \in M_{g_1}^1$ y $\lambda > \max\{\lambda_{g_1}^1, k_1\}$. El polinomio casi-ordinario h_λ tiene la misma multiplicidad de f_1 (de hecho tiene los mismos exponentes característicos) y el orden de coincidencia con f_1 es $k(f_1, h_\lambda) = \lambda$. Por tanto

$$v_1(h_\lambda) = \lambda - \lambda_{g_1}^1 + n_{g_1}^1 \gamma_{g_1}^1.$$

Para calcular el resto de los valores del polinomio h_λ tengamos en cuenta que si $j \neq 1$ entonces $k(f_j, h) = k(f_j, f_1)$. Por tanto si $\lambda_q^1 \leq k(f_j, f_1) \leq \lambda_{q+1}^1$ se tiene que:

$$v_j(h_\lambda) = e_q^h k(h, f_j) + \sum_{k=1}^q (e_{k-1}^h - e_k^h) \lambda_k^j = v_j(f_1).$$

Así pues, si $k := \max\{\lambda_{g_1}^1, k_1\}$, para todo $\mu \in M_{g_1}^1$, $\mu \geq 0$, el polinomio $h_{\mu+k}$ satisface que

$$\begin{aligned} v_1(h_{\mu+k}) &= \mu + (k - \lambda_{g_1}^1 + n_{g_1}^1 \gamma_{g_1}^1) \\ v_j(h_{\mu+k}) &= v_j(f_1) \text{ para } j = 2, \dots, r. \end{aligned}$$

Por tanto, tomando $\beta = k - \lambda_{g_1}^1 + n_{g_1}^1 \gamma_{g_1}^1$ se tiene que $\beta + M_+^1 \subset pr_1(pr_{I-\{1\}}^{-1}(\xi^1))$ y ξ^1 tiene fibra infinita.

Veamos ahora que ξ^1 es el menor elemento de S^1 con esta propiedad. Sea $\alpha \in S^1$ con fibra infinita y de manera que no existe un elemento $\beta \in S^1$ con fibra infinita y $\beta < \alpha$. Sea $\gamma \in \Gamma^1$, $\gamma \geq n_{g_1}^1 \gamma_{g_1}^1$ tal que $\gamma + M_+^1 \subset pr_1(pr_{I-\{1\}}^{-1}(\alpha))$. Sea $h \in \hat{C}_f$ tal que $pr_{I-\{1\}}(\underline{v}(h)) = \alpha$ y $v_1(h) = \mu \gg \gamma$ con la condición adicional de que $v_1(h) \in M^1$, pero $v_1(h) \notin M_{g_1-1}^1$.

Afirmamos que h tiene una componente irreducible h' (de hecho se podría probar que h podría haberse elegido irreducible) con orden de coincidencia $k(f_1, h') \geq \lambda_{g_1}^1$. En efecto, de no ser así $k(f_1, g) < \lambda_{g_1}^1$ para cualquier factor irreducible g de h , por tanto $v_1(g) \in M_{g_1-1}^1$ para todo factor g y como consecuencia también $v_1(h) \in M_{g_1-1}^1$. Es un ejercicio sencillo comprobar que eligiendo μ suficientemente grande (y usando que $\xi^1 \not\leq \alpha$) se descarta la posibilidad de que $v_1(h') = \lambda_{g_1}^1$. Por tanto la componente h' tiene grado un múltiplo del grado de f_1 , $\deg(h') = k \cdot n^1 = k \cdot \deg(f_1)$, y $v_j(h') = k \cdot v_j(f_1)$, $j \neq 1$. Así pues tiene que ser $h = h'$ irreducible, $k = 1$ y $\alpha = \xi^1$. \square

Teorema 2.2.15. *El semigrupo $S(f)$ permite recuperar los semigrupos de cada una de las ramas: $\{\Gamma^i, i = 1 \dots, r\}$ y los ordenes de coincidencia $k(f_i, f_j)$ entre pares de componentes irreducibles.*

Demostración Los semigrupos Γ^i se obtienen por proyección. La proposición anterior nos dice que es posible recuperar $v_j(f_i)$ para todo par de índices $i \neq j$. Por lo tanto para terminar basta comprobar que si $f = f_1 \cdot f_2$ es casi-ordinario y f_1, f_2 irreducibles entonces, conocidos los exponentes característicos de cada uno de ellas, es equivalente conocer $k(f_1, f_2)$ a conocer $v_1(f_2)$. \square

Nota 2.7. El Teorema anterior nos dice que el semigrupo permite recuperar el árbol de Eggers-Wall de f . En la sección siguiente probaremos que el recíproco es también cierto, es decir, que el árbol de Eggers-Wall permite recuperar explícitamente el semigrupo $S(f)$.

Definición 2.2.16. Diremos que un elemento $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r) \in S(f)$ es un conductor si

$$\{\gamma \in S(f) \mid \gamma > \delta\} = \{\gamma \in S(f_1) \times \dots \times S(f_r) \mid \gamma_i \geq \delta_i, i = 1, \dots, r\}.$$

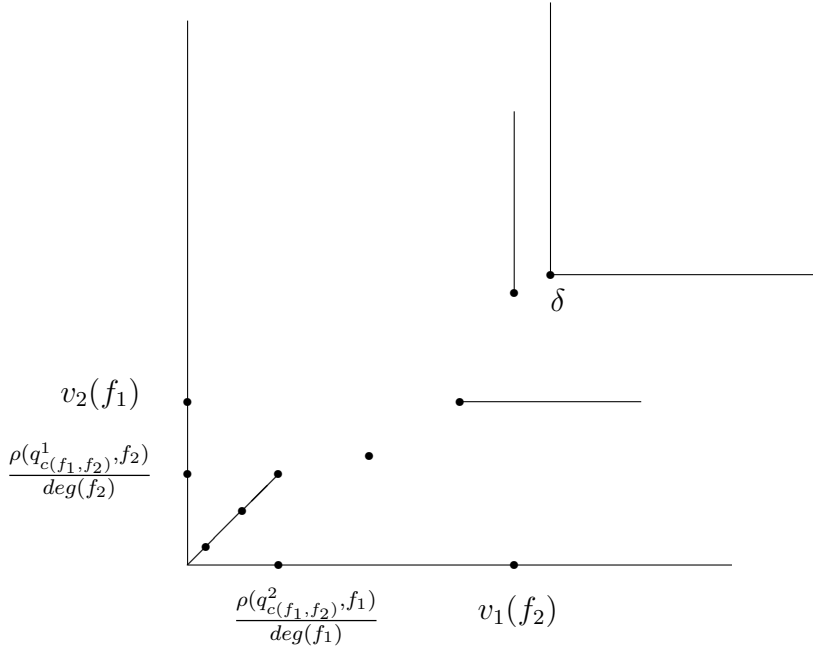
El conjunto conductor está formado por todos los elementos conductores de $S(f)$.

Proposición 2.2.17. Existe un conductor δ en $S(f)$.

Demostración: Se puede probar que si tomamos $c_i \in \Gamma^i$ un elemento conductor de Γ^i , $i = 1, \dots, r$ y denotamos por $\xi_j^i = v_j(f_i)$, $i, j = 1, \dots, r$, $i \neq j$ entonces el elemento $\delta \in S(f)$ tal que $\delta_i = c_i + \sum_{j \neq i} \xi_i^j = c_i + \sum_{j \neq i} v_i(f_j)$ es un conductor de $S(f)$.

También podemos construir un elemento concreto de la siguiente forma. Sea $i = 1, \dots, r$ y sea h_i un polinomio como el construido en la prueba de la Proposición 2.2.14 pero ahora para f_i y con $\lambda \gg \lambda_{g_i}^i$. Es claro que $h = h_1 \cdot h_2 \cdot \dots \cdot h_r$ tiene valor en el semigrupo (además $\underline{v}(h) = \delta$ satisface las condiciones descritas en el párrafo anterior) y es muy sencillo probar que verifica las propiedades de ser un conductor. \square

Por lo que hemos visto hasta ahora un boceto del semigrupo sería como indica el siguiente dibujo.



El semigrupo está contenido en una recta mientras todas las ramas coinciden, es decir, se comporta como si únicamente tuviera una sola componente. Después, por cada componente irreducible aparece una fibra infinita que nos permite recuperar los ordenes de contacto entre pares de ramas. Finalmente, hay un conductor δ a partir del cual están todos los elementos en el semigrupo.

Proposición 2.2.18. *El semigrupo $S(f)$ verifica las siguientes propiedades:*

- (P1) $0 \in S(f)$.
- (P2) Si $\alpha, \beta \in S(f)$ entonces $\inf(\alpha, \beta) = (\min(\alpha_1, \beta_1), \dots, \min(\alpha_r, \beta_r)) \in S(f)$ siempre y cuando exista $\min(\alpha_i, \beta_i) \forall i$.
- (P3) $S(f)$ tiene un conductor.

Demostración:

- (P1) Toda unidad U satisface esta propiedad.
- (P2) Si $(v_1(h_1), \dots, v_r(h_1)) = \alpha$ y $(v_1(h_2), \dots, v_r(h_2)) = \beta$ entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $v_1(h_1 - \lambda h_2) = \min(\alpha_1, \beta_1), \dots, v_r(h_1 - \lambda h_2) = \min(\alpha_r, \beta_r)$. Si existe algún i tal que $v_i(h_1) = v_i(h_2)$ se elige λ de manera que en $v_i(h_1 - \lambda h_2)$ no se cancelen los monomios principales de $v_i(h_1)$ y $v_i(h_2)$.

(P3) Por la Proposición 2.2.17.

□

Nota 2.8. Al contrario de lo que pasa en el caso de curvas (ver [32]), no se verifica la siguiente propiedad:

(P4) Si existen $\alpha, \beta \in S(f)$ tal que $\alpha_i = \beta_i$ para un cierto índice i , y $\alpha_j \leq \beta_j$ para resto de los índice $j \neq i$, entonces existe $\gamma \in S(f)$ verificando: $\gamma_j = \min(\alpha_j, \beta_j)$ si $j \neq i$ y $\gamma_i \not\geq \alpha_i = \beta_i$.

Tomamos dos ramas casi-ordinarias parametrizadas por las raíces $\zeta_1 = x_1^2 x_2^2$ y $\zeta_2 = x_1^{1/2} + x_1^5 x_2^5$. Por otra parte consideramos dos gérmenes h_1, h_2 de raíces $\zeta_{h_1} = x_1^{1/2} + x_1 x_2^3$ y $\zeta_{h_2} = x_1^{1/2} + x_1^3 x_2^3$ respectivamente.

$$v_1(h_1) = (1, 0), v_2(h_1) = \left(\frac{3}{2}, 3\right),$$

$$v_1(h_2) = (1, 0), v_2(h_2) = \left(\frac{7}{2}, 3\right).$$

Sin embargo no existe $v_1(h_1 - h_2)$, falta probar que no existe h con $v_2(h) = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$ y $v_1(h) \not\geq (1, 0)$. Supongamos que si existe, como $v_2(h) = \left(\frac{3}{2}, 3\right)$ entonces una raíz de h comienza $\zeta_h = ax_1^{1/2} + bx_1^\alpha x_2^\beta + \dots$, con $a, b \neq 0$. Además $\left(\frac{3}{2}, 3\right) = (e_0^h - e_1^h)\left(\frac{1}{2}, 0\right) + e_1^h(\alpha, \beta)$ de lo que se deduce que $\beta = \frac{3}{e_1^h}$ y $(e_0^h - e_1^h)\frac{1}{2} + e_1^h\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2e_1^h} - \frac{e_0^h}{e_1^h} + 1$. Por otra parte $\frac{e_0^h}{e_1^h} \geq 2$ lo que implica que $\frac{3}{2e_1^h} - \frac{e_0^h}{e_1^h} + 1 < 0$ a menos que $e_0^h = 2$ y $e_1^h = 1$, en cuyo caso $(\alpha, \beta) = (1, 3)$.

Si ahora calculamos $v_1(h) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)2 = (1, 0)$ y por tanto no es posible que $v_1(h) \not\geq (1, 0)$. □

2.3. Generadores del Semigrupo

Esta sección está dedicada a calcular un sistema de generadores del semigrupo de una hipersuperficie casi-ordinaria no necesariamente irreducible. Para ello comenzamos describiendo un conjunto de generadores (no minimal) para el caso irreducible que nos proporcionará la vía de la extensión al caso general.

En lo que sigue f denota la ecuación de una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible $(S, 0)$, $\zeta = \sum_\lambda a_\lambda X^\lambda \in R_{d,n}$ una raíz de f , $\lambda_1 < \dots < \lambda_g$ la

sucesión de exponentes característicos de f . Para cada $i = 0, 1, \dots, g$ sea $C_i = \{q \in \mathbb{Q}^d \mid \lambda_i \leq q \leq \lambda_{i+1}\}$ (estamos suponiendo que $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_{g+1} = \infty$). Recordemos que, a partir del Lema 2.1.7, el conjunto de los posibles órdenes de coincidencia $k(f, h)$ cuando h es racionalmente comparable con f está contenido en el conjunto $C = \bigcup_{i=0}^g C_i$.

Sea $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0}^d \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^d$ la aplicación definida por $\psi(\underline{y}, z) \mapsto \frac{1}{z}\underline{y}$.

Proposición 2.3.1. *Sean $\alpha^i \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{d+1}$, $q^i = \psi(\alpha^i) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^d$ para $i = 1, \dots, l$. Sea $P = \text{Envol}(q^1, \dots, q^l)$ la envolvente convexa del conjunto $\{q^1, \dots, q^l\}$. Entonces $\psi^{-1}(P)$ es el cono convexo poliedral generado por $\{\alpha^1, \dots, \alpha^l\}$, $C(P) = \langle \alpha^1, \dots, \alpha^l \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$.*

Demostración: Es evidente que $\psi^{-1}(q) = \{\lambda(q, 1) \mid \lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$. Sea $q \in P$, $q = \sum_{i=1}^l a_i q^i$ con $\sum_{i=1}^l a_i = 1$. Se tiene entonces que $\alpha = (q, 1) = \sum_{i=1}^l a_i (q^i, 1) = \sum_{i=1}^l a_i / \alpha_{d+1}^i \alpha^i \in C(P)$. Por tanto $\psi^{-1}(P) \subset C(P)$.

Para probar la contención inversa basta demostrar que si $\alpha, \beta \in \psi^{-1}(P)$ entonces $\psi(\alpha + \beta) \in P$. Si ponemos $\alpha = (\underline{x}, w)$, $\beta = (\underline{y}, z)$ tendremos que $\psi(\alpha + \beta) = \frac{1}{w+z}(\underline{x} + \underline{y})$ y un cálculo elemental prueba que $\psi(\alpha + \beta) = (1-t)\psi(\alpha) + t\psi(\beta)$ con $t = z/(w+z) < 1$. Por tanto, $\psi(\alpha + \beta)$ está en el segmento que une las imágenes de α y β . \square

Uno de los objetos que utilizaremos constantemente son las curvetas que a continuación definimos.

Definición 2.3.2. *Sea f la ecuación de una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible con exponentes característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ y raíz $\zeta = \sum a_\lambda \underline{X}^\lambda$. Fijado un elemento $\delta \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^d$, decimos que $h^{(\delta)}$ es una **curveta** por δ si $h^{(\delta)}$ es el polinomio mínimo de la serie fraccionaria $\zeta^{(\delta)} = \sum_{\lambda \neq \delta} a_\lambda \underline{X}^\lambda + b_\delta \underline{X}^\delta$ donde $b_\delta \neq 0$, b_δ es un coeficiente cualquiera de manera que $k(f, h^{(\delta)}) = \delta$.*

Nótese que $h^{(\delta)}$ es un polinomio casi-ordinario irreducible, $\zeta^{(\delta)}$ es una raíz de $h^{(\delta)}$ y además $k(f, h^{(\delta)}) = k(\zeta, \zeta^{(\delta)}) = \delta$. La condición $k(f, h^{(\delta)}) = \delta$ es equivalente a imponer al coeficiente b_δ que no coincida con el coeficiente de \underline{X}^δ de ζ ni de ninguna de sus raíces conjugadas. Evidentemente la raíz $\zeta^{(\delta)}$ se puede definir a partir de una truncación ζ^δ de ζ como $\zeta^{(\delta)} = \zeta^\delta + b_\delta \underline{X}^\delta$, siendo $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un elemento genérico.

Si tenemos que $\lambda_i < \delta \leq \lambda_{i+1}$ entonces la hipersuperficie casi-ordinaria $h^{(\delta)}$ tiene como sucesión de exponentes característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_i$ y además δ , siempre que $\delta \notin M_i$. Denotaremos el grado de $h^{(\delta)}$ por N_δ , nótese que se tiene $N_\delta = n_1 \cdots n_i \cdot n_\delta$ con $n_\delta = 1$ si y sólo si $\delta \in M_i$. Además se tiene que el entero n_δ se caracteriza por la condición:

$$n_\delta = \min\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \ell\delta \in M_i\} .$$

Similar caracterización se puede dar para el grado N_δ :

$$N_\delta = \text{mín}\{\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \ell\delta \in n_1 \cdots n_i M_i\}.$$

El grado de $h^{(\delta)}$, o mejor aún el entero n_δ , nos permite dar una sección de la aplicación ψ restringida a C_i :

$$\begin{aligned} \varphi : C_i &\rightarrow M_i \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \subset \mathbb{Q}_{\geq 0}^{d+1} \\ \delta &\mapsto (n_\delta \cdot \delta, n_\delta) \end{aligned}$$

Más en general, denotamos por L_i al subgrupo de \mathbb{Q}^{d+1} , $L_i := M_i \times \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}^{d+1}$ y dado $q \in \mathbb{Q}^d$ sea n_q el menor entero positivo tal que $n_q \cdot q \in M_i$. Entonces definimos

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Q}^d &\rightarrow M_i \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \subset \mathbb{Q}^{d+1} \\ \delta &\mapsto (n_\delta \cdot \delta, n_\delta) \end{aligned}$$

El siguiente resultado clarifica la relación exacta entre curvetas y truncaciones.

Lema 2.3.3. *Sea $h \in \hat{C}_f$, supongamos que $\delta = k(f, h) \in C_i$ con $\delta \neq \lambda_i, \lambda_{i+1}$. Sea h^δ la truncación de h a nivel δ y $h^{(\delta)}$ una curveta en δ . Entonces existe un entero $k \geq 0$ tal que:*

1. $\deg(h) = k \deg(h^\delta) = k \deg(h^{(\delta)}) = kn_1 \cdots n_i n_\delta$
2. $v(h) = kv(h^\delta) = kv(h^{(\delta)}) = k \cdot n_\delta \cdot (\delta - \lambda_i + n_i \gamma_i)$

Demostración: Sea $\zeta = \sum a_\lambda \underline{X}^\lambda$ una raíz de f y $\eta = \sum_{\lambda \neq \delta} a_\lambda \underline{X}^\lambda + b_\delta \underline{X}^\delta$ la raíz de la truncación h^δ que satisface que $k(f, h) = k(\zeta, \eta) = \delta$.

Si se tiene que $b_\delta \neq 0$ entonces h^δ es una curveta en δ y el resultado es una consecuencia inmediata de la Proposición 2.2.7. En el caso en que $b_\delta = 0$, como $k(\zeta, \eta) = \delta$, $\lambda_i < \delta < \lambda_{i+1}$ necesariamente $a_\delta \neq 0$ y $\delta \in M_i$. Como consecuencia, $n_\delta = 1$ y tanto para h^δ como para una curveta $h^{(\delta)}$ se tiene que $\deg(h^\delta) = \deg(h^{(\delta)}) = n_1 \cdots n_i$ y $v(h^\delta) = v(h^{(\delta)}) = \delta - \lambda_i + n_i \gamma_i$. \square

Nota 2.9. Nótese que si tenemos $\delta = k(f, h) = \lambda_i$, con las notaciones del lema anterior, pueden ocurrir dos casos. Si $b_{\lambda_i} = 0$ entonces h^δ es una i -semi raíz de f y se tiene que $\deg(h^\delta) = n_1 \cdots n_{i-1}$ y $v(h^\delta) = \gamma_i$. Si $b_{\lambda_i} \neq 0$ entonces h^δ es una curveta en λ_i y se tiene $\deg(h^\delta) = n_1 \cdots n_i$ y $v(h^\delta) = n_i \gamma_i$. Para el caso $k(f, h) = \lambda_{i+1}$ se tienen las mismas posibilidades.

Los resultados que sigue son significativos (aunque no imprescindibles) en la línea del resultado que buscamos. Este no es otro que demostrar que

los valores alcanzados por polinomios $h \in \hat{C}_f$ tales que $\lambda_i < k(f, h) < \lambda_{i+1}$ se pueden alcanzar a partir de un número finito de ellos. A partir del Lema 2.3.3 ya hemos visto que nos podemos restringir al caso en que $h = h^{(\delta)}$ es una curveta. La Proposición siguiente nos indica en qué condiciones el valor $v(h^{(q)})$ es suma de los valores en otras dos curvetas $v(h^{(q_1)}), v(h^{(q_2)})$, siendo $q_1, q_2, q \in C_i$.

Definición 2.3.4. *Dados $q_1, q_2 \in C_i$ denotaremos por $q_1 * q_2 \in C_i$ al elemento $q_1 * q_2 := \psi(\varphi(q_1) + \varphi(q_2))$ y le llamaremos **suma de Farey** de q_1 y q_2 relativa a φ .*

Nota 2.10. La suma de Farey de dos números racionales $q_1 = a/b, q_2 = c/d$ que suponemos escritos en su forma irreducible es el número racional $\frac{a+c}{b+d}$. Nótese que en el caso $d = 1$ y $M_i = \mathbb{Z}$ (usando las notaciones de la definición) se tiene que $\varphi(q_1) = (a, b), \varphi(q_2) = (c, d)$ y $q_1 * q_2$ es la suma de Farey en el sentido clásico. Así pues podemos entender la definición anterior como una generalización de dicho concepto relativo al retículo M_i y considerando las d -uplas de números racionales con un denominador común para todas las coordenadas.

En cierto modo podría considerarse como mas natural la sección de ψ definida a partir del grado de $h^{(\delta)}$, $\deg(h^{(\delta)}) = N_\delta$:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q}_{\geq 0}^d &\rightarrow n_1 \cdots n_i M_i \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \subset \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1} \\ \delta &\mapsto (N_\delta \cdot \delta, N_\delta) \end{aligned}$$

Siempre que tomemos $q_1, q_2 \in C_i$ (que será el caso en que usaremos la construcción anterior) es un fácil ejercicio demostrar que $q_1 * q_2 = \psi(\phi(q_1) + \phi(q_2))$. Por tanto no hay diferencia en tomar una u otra sección para la definición anterior. En este caso, nótese que $r_i = N_{q_i} q_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ para $i = 1, 2$ y se tiene

$$q_1 * q_2 = \frac{r_1}{N_{q_1}} * \frac{r_2}{N_{q_2}} = \frac{r_1 + r_2}{N_{q_1} + N_{q_2}}.$$

Lema 2.3.5. *Sean $q_1, q_2 \in C_i$ y $q = q_1 * q_2$ su suma de Farey relativa a φ . Entonces existe un entero $k \geq 1$ tal que $\varphi(q_1) + \varphi(q_2) = k\varphi(q)$.*

Demostración: Puesto que $n_q = \min\{\ell \mid \ell q \in M_i\}$ y $(n_{q_1} + n_{q_2})q = (n_{q_1}q_1 + n_{q_2}q_2 \in M_i$ se tiene que $n_{q_1} + n_{q_2} \geq n_q$. Ahora, haciendo la división euclídea $n_{q_1} + n_{q_2} = kn_q + r$ con $r < n_q$ se tiene que $rq = (n_{q_1} + n_{q_2})q - kn_qq \in M_i$. Como $r < n_q$ forzosamente $r = 0$ y $n_{q_1} + n_{q_2} = kn_q$. Por lo tanto se tiene que

$$\varphi(q_1) + \varphi(q_2) = (n_{q_1}q_1 + n_{q_2}q_2, n_{q_1} + n_{q_2}) = k(n_q \frac{n_{q_1}q_1 + n_{q_2}q_2}{n_{q_1} + n_{q_2}}, n_q) = k\varphi(q).$$

□

Nótese que el lema anterior también se puede expresar en términos de los grados y la aplicación ϕ , es decir, se tiene que $\phi(q_1) + \phi(q_2) = k\phi(q)$, en particular, $\deg(h^{(q_1)}) + \deg(h^{(q_2)}) = k \cdot \deg(h^{(q)})$.

Proposición 2.3.6. *Sea f la ecuación de una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible con exponentes característicos $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ y raíz $\zeta = \sum a_\lambda \underline{X}^\lambda$. Sean $q_1, q_2 \in C_i \subset \mathbb{Q}^d$, h_1, h_2 curvetas por q_1 y q_2 respectivamente y sea h una curveta por $q = q_1 * q_2$. Entonces son equivalente:*

1. $v(h) = v(h_1) + v(h_2)$.
2. $\varphi(q) = \varphi(q_1) + \varphi(q_2)$.
3. $\deg(h) = \deg(h_1) + \deg(h_2)$.

Demostración: Teniendo en cuenta la nota anterior es evidente que las dos últimas condiciones son equivalentes, ya que $\varphi(q) = \varphi(q_1) + \varphi(q_2)$ si y sólo si $n_{q_1} + n_{q_2} = n_q$ y esta última condición es equivalente a $N_{q_1} + N_{q_2} = N_q$ (por supuesto también es equivalente a decir que $\phi(q) = \phi(q_1) + \phi(q_2)$). Por el lema anterior tendremos que $\deg(h_1) + \deg(h_2) = k \deg(h)$, para un $k \in \mathbb{N}$.

Para h_1 y h_2 se tiene que $k(h_1, f) = q_1$ y $k(h_2, f) = q_2$. Por tanto, por la fórmula (2.8) se tiene:

$$\rho(f, h_1) = \deg(h_1)(e_i q_1 + \sum_{k=1}^i (e_{k-1} - e_k) \lambda_k),$$

$$\rho(f, h_2) = \deg(h_2)(e_i q_2 + \sum_{k=1}^i (e_{k-1} - e_k) \lambda_k).$$

Por lo tanto,

$$\rho(f, h_1) + \rho(f, h_2) = e_i(q_1 \deg(h_1) + q_2 \deg(h_2)) + (\deg(h_1) + \deg(h_2)) \sum_{k=1}^i (e_{k-1} - e_k) \lambda_k.$$

Por otra parte, para el polinomio h se tiene que $k(h, f) = q = (\deg(h_1)q_1 + \deg(h_2)q_2) / (\deg(h_1) + \deg(h_2))$ y por tanto:

$$\rho(f, h) = e_i \deg(h) \frac{\deg(h_1)q_1 + \deg(h_2)q_2}{\deg(h_1) + \deg(h_2)} + \deg(h) \left(\sum_{k=1}^i (e_{k-1} - e_k) \lambda_k \right). \quad (2.11)$$

Ahora, es claro que

$$\rho(f, h_1) + \rho(f, h_2) = k\rho(f, h) .$$

Por lo tanto $v(h_1) + v(h_2) = kv(h)$ y se tiene $v(h_1) + v(h_2) = v(h)$ si y sólo si $\deg(h_1) + \deg(h_2) = \deg(h)$. \square .

El resultado anterior se puede generalizar fácilmente (se demuestra exactamente igual) de la siguiente forma.

Corolario 2.3.7. Sean $f, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_g$ y $\zeta = \sum a_\lambda \underline{X}^\lambda$ como en la proposición anterior. Sean $q_1, \dots, q_t \in C_i \subset \mathbb{Q}^d$, para $j = 1, \dots, t$ sea h_j una curveta por q_j y h una curveta por $q = q_1 * \dots * q_t = \psi(\sum \varphi(q_i))$. Entonces son equivalentes:

1. $v(h_q) = \sum_{j=1}^t v(h_{q_j})$.
2. $\varphi(q) = \sum_{j=1}^t \varphi(q_j)$.
3. $\deg(h) = \sum_{j=1}^t \deg(h_j)$.

Dado $J \subset I = \{1, \dots, d\}$ y $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^d$ denotaremos por μ^J a la d -upla $\mu^J = \sum_{i \in J} \mu_i e_i$. Es decir, para la coordenada i -ésima de μ^J tendremos que $\mu_i^J = \mu_i$ si $i \in J$ y $\mu_i^J = 0$ si $i \notin J$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}_{\geq 0}^d$ con $\alpha < \beta$. Denotamos por $C[\alpha, \beta]$ a la envolvente convexa del conjunto $C_{\alpha, \beta} := \{\alpha + (\beta - \alpha)^J \mid J \subset I\}$. Nótese que $C[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \alpha \leq x \leq \beta\}$ es el hipercubo que tiene por vértices los puntos $\alpha + (\beta - \alpha)^J$, $J \subset I$. Por ejemplo, en dimensión 3 son los 8 vértices del cubo:

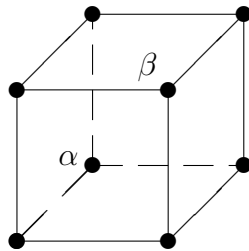


Figura.2: $C_{\alpha, \beta}$ con vértice mínimo α y vértice máximo β

Sea $i \in \{1, \dots, g\}$, tomamos $\lambda_i < \lambda_{i+1}$. Se tiene que $C_i = C[\lambda_i, \lambda_{i+1}] \cap \mathbb{Q}^d$, para $J \subset I$ denotaremos por $E^J = \lambda_i + (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^J$, por tanto el conjunto

de vértices $C_{\lambda_i, \lambda_{i+1}} = \{E^J \mid J \subset I\}$. Así mismo, denotamos por $n_J = n_{E^J}$ al menor entero positivo tal que $n_J \cdot E^J \in M_i$, por tanto $\varphi(E^J) = (n_J \cdot E^J, n_J) \in L_i$. Denotaremos por $S(C_i)$ al subsemigrupo de $L_i \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}^{d+1}$ generado por los elementos $\varphi(E^J)$, $J \subset I$, es decir,

$$S(C_i) := \langle \{(n_J \cdot E^J, n_J) \mid J \subset I\} \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}} = \sum_{J \subset I} (n_J \cdot E^J, n_J) \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

También denotaremos por $C(C_i) = \psi^{-1}(C[\lambda_i, \lambda_{i+1}])$. Nótese que por la Proposición 2.3.1 se tiene que $C(C_i)$ es el cono convexo generado por los vectores $\varphi(E^J)$, $J \subset I$:

$$C(C_i) = \langle \{(n_J \cdot E^J, n_J) \mid J \subset I\} \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}} = \sum_{J \subset I} \mathbb{R}_{\geq 0} (n_J \cdot E^J, n_J).$$

Para $i < g$, el cierre entero del semigrupo $S(C_i)$ en el retículo L_i , $(\overline{S(C_i)})_{L_i}$, es el conjunto de los elementos $x \in L_i$ tales que $nx \in S(C_i)$ para un $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Lema 2.3.8. *Con las notaciones anteriores, se tiene que:*

1. $C(C_i) \cap L_i = (\overline{S(C_i)})_{L_i}$.
2. Los elementos del conjunto $\{\varphi(q) \mid q \in C_i\} \subset C(C_i) \cap L_i$ son los elementos primitivos del semigrupo.
3. $C(C_i) \cap L_i$ es un semigrupo finitamente generado. Un conjunto de generadores está formado por los elementos

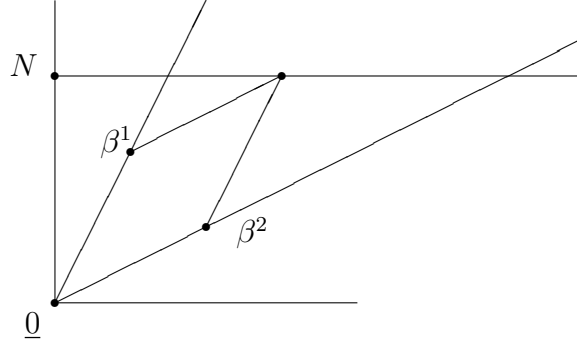
$$\{\varphi(\delta) = (n_\delta \cdot \delta, n_\delta) \mid \delta \in C_i \text{ y } n_\delta < \sum_{J \subset I} n_J\}.$$

Demostración: Cualquier elemento $\underline{x} \in C(C_i) \cap L_i$ es combinación lineal con coeficientes racionales de los generadores del cono: $\beta^J = (n_J \cdot E^J, n_J)$, $J \subset I$. Multiplicando por el mínimo común múltiplo de los denominadores, m , tendremos que $m\underline{x} \in S(C_i)$. La contención inversa es trivial, ya que $C(C_i) \cap L_i$ es un semigrupo saturado.

Sea $(\underline{x}, z) \in C(C_i) \cap L_i$ y $q = (1/z)\underline{x} \in C_i$. Es claro que $z \geq n_q$, dividiendo tendremos que $z = kn_q + r$ con $r < n_q$ entero. Como $r \cdot q = z \cdot q - kn_q q \in M_i$ necesariamente $r = 0$, ya que n_q es el menor entero tal que $n_q \cdot q \in M_i$. Por lo tanto $(\underline{x}, z) = k\varphi(q)$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Nótese que

$$\{s(\underline{x}, z) \mid s \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \cap L_i = \psi^{-1}(q) \cap L_i = \{k \cdot \varphi(q) \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

El último apartado es el Lema de Gordan.



El conjunto de generadores descrito se deduce de su demostración. En efecto, sea $\alpha = \sum_{J \subset I} x_J \beta^J \in C(C_i) \cap L_i$. Los elementos x_J son racionales, denotemos por $y_J = \lfloor x_J \rfloor$ su parte entera y $r_J = x_J - y_J < 1$ su resto decimal. Se tiene entonces que

$$\alpha = \sum y_J \beta^J + \sum r_J \beta^J$$

y evidentemente el primer sumando está en $S(C_i)$. En cuanto al segundo, dado que $\sum r_J \beta^J = (\underline{m}, n) \in M_i \times \mathbb{Z}_{\geq 0}$ se tiene que $n < \sum n_J$ y descomponiéndolo en elementos primitivos se tiene el resultado. \square

Sea $\underline{z} \in M_i^+ = M_i \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}^d$. El isomorfismo lineal $\rho_{\underline{z}} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ definido por $\rho_{\underline{z}}(\underline{x}, n) = (\underline{x} + n\underline{z}, n)$ induce un isomorfismo de retículos $\rho_{\underline{z}} : L_i \rightarrow L_i$. Sean $\alpha^1, \dots, \alpha^t \in L_i \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}^{d+1}$ y $C := \langle \alpha^1, \dots, \alpha^t \rangle_{\mathbb{R}_{\geq 0}}$ el cono convexo poliedral que generan. La aplicación $\rho_{\underline{z}}$ induce un isomorfismo entre los semigrupos saturados: $C \cap L_i \simeq \rho_{\underline{z}}(C) \cap L_i$.

Sea $\underline{z} = n_i \gamma_i - \lambda_i \in M_i^+$ y desplazamos el hipercubo $C[\lambda_i, \lambda_{i+1}]$ por \underline{z} , es decir, consideramos $VC_i := C_i + \underline{z} = (C[\lambda_i, \lambda_{i+1}] + \underline{z}) \cap \mathbb{Q}^d$. Es evidente que el cono $C(VC_i)$ es la imagen del cono $C(C_i)$ por $\rho_{\underline{z}}$ y por lo tanto los semigrupos $C(C_i) \cap L_i$ y $W_i = C(VC_i) \cap L_i$ son isomorfos mediante $\rho_{\underline{z}}$.

Sea A_i el conjunto de polinomios mónicos irreducibles $h \in R_d[Y]$ que son racionalmente comparables con f y de manera que

1. $k(f, h) \in C_i$.
2. h no es una i -semi raíz o una $i + 1$ -semi raíz.

Denotaremos por $V_i = \{v(h) \mid h \in A_i\} \subset \Gamma$.

Proposición 2.3.9. *Para $i < g$, el conjunto V_i es un subsemigrupo de Γ finitamente generado. De hecho V_i es la imagen del semigrupo $W_i = C(VC_i) \cap L_i$ por la proyección natural.*

Como consecuencia, un conjunto de generadores de V_i son los valores de las curvetas $v(h^{(\delta)})$, siendo $\delta \in C_i$ y $n_\delta < \sum_{J \subset I} n_J$.

Demostración A partir de los resultados anteriores es claro que el conjunto V_i está formado por los múltiplos enteros de los valores de las curvetas $v(h^{(\delta)})$, con $\delta \in C_i$. Es decir, teniendo en cuenta que por el Lema 2.3.3 $v(h^{(\delta)}) = n_\delta(\delta - \lambda_i + n_i\gamma_i)$ se tiene que

$$V_i := \{kv(h^{(\delta)}) \mid \delta \in C_i\} = \{k \cdot n_\delta \cdot (\delta - \lambda_i + n_i\gamma_i) \mid k \geq 0, \delta \in C_i\} \subset \Gamma_i \subset \Gamma.$$

Evidentemente $(v(h^{(\delta)}), n_\delta) = (n_\delta \cdot (\delta - \lambda_i + n_i\gamma_i), n_\delta) = (n_\delta \cdot \delta + n_\delta(n_i\gamma_i - \lambda_i), n_\delta)$ y por lo tanto

$$\rho_{\underline{z}}(n_\delta \cdot \delta, n_\delta) = \varphi(\delta + n_i\gamma_i - \lambda_i) = (v(h^{(\delta)}), n_\delta).$$

Así pues es claro que, si tomamos la proyección $\pi : \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}^d$ se tiene que $V_i = \pi(W_i)$ y el resultado está probado.

Nótese que los elementos $\varphi(\delta + n_i\gamma_i - \lambda_i) = (v(h^{(\delta)}), n_\delta)$, que son los valores en las curvetas, son justamente los elementos primitivos del semigrupo saturado $W_i = C(VC_i) \cap L_i$. \square

El siguiente resultado permite reducir considerablemente el conjunto de generadores del semigrupo V_i .

Teorema 2.3.10. *Para $i < g$, el conjunto V_i es un semigrupo finitamente generado. Un conjunto de generadores del mismo está formado por el conjunto*

$$H'_i := \{v(h^{(\delta)}) \mid \delta \in C_i \text{ y } n_\delta \leq \max\{n_J + n_K \mid J, K \subset I\}\}.$$

Demostración: Tomando $\underline{z} = \lambda_i$ podemos simplificar un poco las condiciones de partida desplazando el hipercubo al origen, es decir, consideramos $C_i^0 = C_i - \lambda_i = C[0, \lambda_{i+1} - \lambda_i] \cap \mathbb{Q}^d$ y el cono $C(C_i^0) = \psi^{-1}C[0, \lambda_{i+1} - \lambda_i]$. La aplicación $\rho_{\underline{z}}$ induce por tanto un isomorfismo entre los semigrupos $C(C_i^0) \cap L_i$ y $C(C_i) \cap L_i$ (y por lo tanto también con $C(VC_i) \cap L_i$).

Por lo tanto la prueba se puede reducir a probar que el semigrupo $C(C_i^0) \cap L_i$ está generado por el conjunto de elementos $\{(n_\delta\delta, n_\delta)\}$ cuando $\delta \in C_i^0$ y $n_\delta < N := \max\{n_J + n_K \mid J, K \subset I\}$.

Denotaremos por $(\alpha^J, n_J) = (n_J(E^J - \lambda_i), n_J) = \varphi(E^J - \lambda_i)$, $J \subset I$ al conjunto de vértices del hipercubo $C[0, \lambda_{i+1} - \lambda_i]$. Nótese que $\alpha^\emptyset = 0$ y si $J \subset I$:

1. $\alpha^J \in M_i$.
2. $\alpha_i^J = 0$ si $i \notin J$ y $\alpha_i^J \neq 0$ si $i \in J$.
3. $r_i = \alpha_i^J/n_J$ no depende de J con la condición $i \in J$.

Sea $\underline{x} = (\alpha, z) = (\alpha_1, \dots, \alpha_d; z) \in C(C_i^0) \cap L_i$ con $z \geq N$. Definimos el conjunto $J \subset I$ con la condición: $i \in J$ si y sólo si para todo $K \subset I$ con $i \in K$ se tiene que $\alpha_i^K \leq \alpha_i$. Es decir, la condición para que un índice j no esté en J es que α_j sea menor que alguna de las coordenadas α_j^K , $K \subset I$. Obsérvese que $\alpha_k \geq \alpha_k^J$ para todo $k \in J$ y que en el caso en que $J = \emptyset$ se tiene que $(\alpha^J, n_J) = (0, 1)$. Veamos que $\underline{x} - (\alpha^J, n_J) \in C(C_i^0) \cap L_i$, en cuyo caso la prueba concluye por recurrencia, ya que $z - n_J < z$.

Para ello, notemos que trivialmente $\alpha - \alpha^J \in M_i$ y $\alpha - \alpha^J \geq 0$. Por lo tanto resta probar que $\alpha - \alpha^J \in C(C_i^0)$, es decir, que $\frac{\alpha_i - \alpha_i^J}{\alpha_{d+1} - N_J} < r_i$, para todo $i \in I$.

Ahora, si $i \in J$ tendremos que $\alpha_i^J \neq 0$ y por tanto la condición $\frac{\alpha_i - \alpha_i^J}{z - n_J} < r_i = \frac{\alpha_i^J}{n_J}$ equivale a que $\alpha_i n_J \leq \alpha_i^J z$, es decir, a que $\frac{\alpha_i}{z} \leq \frac{\alpha_i^J}{n_J}$ lo cual es cierto porque \underline{x} está en $C(C_i^0)$.

Si $i \notin J$, sea K tal que $i \in K$ y además $\alpha_i < \alpha_i^K$. Supongamos que $\frac{\alpha_i}{z - n_J} > \frac{\alpha_i^K}{n_K}$, en este caso, como $\frac{\alpha_i^K}{n_K} > \frac{\alpha_i}{n_K}$ tendremos que $z - n_J < n_K$, por tanto $z < N$. Pero como hemos supuesto que $z \geq n_K + n_J$ esto no se da nunca y por lo tanto tenemos lo que queremos. \square

El caso en que tomemos $i = g$ el análisis realizado anteriormente no es válido, ya que no tenemos $\lambda_{g+1} \in \mathbb{Q}^d$. Veamos antes un resultado que permitirá deducir el comportamiento en este caso, pero que también aporta información nueva sobre los casos ya tratados.

Proposición 2.3.11. *Sea $i \leq g$ y $\{q^1, \dots, q^r\} \subset C_i \cap M_i$. Sean $P := \text{Envol}(q^1, \dots, q^r)$ la envolvente convexa de q^1, \dots, q^r y $C(P) = \psi^{-1}(P)$ el cono asociado. Entonces el semigrupo $C(P) \cap L_i$ está generado por*

$$\{\varphi(\delta) = (n_\delta \delta, n_\delta) \mid \delta \in P \text{ y } n_\delta \leq d - 1\}.$$

En particular, si estamos en el caso de superficies casi-ordinarias, es decir, $d = 2$ se tiene que $\{\varphi(q) = (q, 1) \mid q \in P \cap M_i\}$ es un conjunto de generadores.

Demostración Es una aplicación directa de la Proposición 2.49 en [15].
□

Corolario 2.3.12. *El semigrupo $C(C_g) \cap L_g$ está generado por el conjunto $\{\varphi(\delta) = (\delta, 1) \mid \delta \in C_g \cap M_g\}$. El conjunto V_g es un subsemigrupo de Γ generado por $H'_g := \{v(h^{(\delta)}) \mid \delta \in C_g \cap M_g\}$.*

Demostración Sea $(\underline{x}, z) \in C(C_g) \cap L_g$ y $\delta = \psi(\underline{x}, z) \in C_g \cap \mathbb{Q}^d$. Sean $q^1, \dots, q^r \subset C_g \cap M_g$ tales que $\delta \in P := \text{Envol}(q^1, \dots, q^r)$. Entonces $(\underline{x}, z) \in C(P) \cap L_g$ y la proposición anterior garantiza que es combinación de los elementos $(q, 1)$, $q \in P \cap M_g$. Como en casos anteriores, el resultado para el conjunto V_g es una consecuencia directa del isomorfismo entre los semigrupos.
□

Nota 2.11. Nótese que el conjunto H'_g es infinito, por otro lado el semigrupo V_g está formado por todos los elementos de la forma $n_g \gamma_g + \delta$ con $\delta \in M_g^+$, es decir, es $V_g = n_g \gamma_g + M_g^+$.

Sea $i \in I$. Modificamos los conjuntos H'_i descritos antes de la siguiente forma:

$$H_i := \{\gamma_i\} \cup H'_i \setminus \{n_i \gamma_i, n_{i+1} \gamma_{i+1}\}.$$

Nótese que desde el punto de vista de la generación de elementos del semigrupo Γ es imprescindible contar con los generadores minimales $\gamma_1, \dots, \gamma_g$.

Evidentemente, el conjunto $H = \bigcup_{i \geq 0} H_i$ es un conjunto de generadores del semigrupo Γ (contiene al sistema de generadores minimal!!). Sin embargo contiene un tipo de información más fina que será imprescindible en el caso de varias componentes irreducible. Una muestra de la afirmación anterior que es una consecuencia inmediata de los resultados ya probados es el siguiente teorema.

Sea $\hat{\Gamma} := \{w(h) := (v(h), \deg(h)) \in \mathbb{Q}^d \times \mathbb{Z} \mid h \in \hat{C}_f\}$ la extensión del semigrupo Γ que consiste en añadir el grado de los polinomios $h \in R_r[Y]$. Para $i = 0, \dots, g$ sea \hat{H}'_i la correspondiente extensión del conjunto H'_i y \hat{H}_i la de H_i . Nótese que, si $\lambda_i < \delta < \lambda_{i+1}$ entonces el grado de $h^{(\delta)}$ es $n_1 \cdots n_i \cdot n_\delta$, nos referiremos a él como $\deg \delta$ de la misma forma $\deg(\lambda_i) = n_1 \cdots n_{i-1}$.

Teorema 2.3.13. *El semigrupo $\hat{\Gamma}$ está generado por $\hat{H} := \bigcup_{i \geq 0} \hat{H}_i$.*

Sea $f = \prod_{i=1}^r f_i$ una hipersuperficie casi-ordinaria con r componentes irreducibles. Para cada $i = 1, \dots, r$ tomaremos el conjunto de los órdenes de

coincidencia de las distintas raíces de f con una raíz fija ζ de f_i , es decir, el conjunto $\{\lambda_j^i\}_{j=1}^{g_i} \cup \{k(f_i, f_j)\}_{j \neq i}$. Sabemos que el conjunto anterior es un conjunto totalmente ordenado, por tanto podemos escribirlo como

$$G_i := \{0 = \beta_0^i < \beta_1^i < \beta_2^i < \dots < \beta_{s_i}^i\} = \{\lambda_j^i\}_{j=1}^{g_i} \cup \{k(f_i, f_j)\}_{j \neq i}.$$

Para $j = 0, \dots, s_i$, extendiendo las construcciones y definiciones de la primera parte de esta sección, consideremos:

1. $N_j^i := \langle \beta_1^i, \dots, \beta_j^i \rangle_{\mathbb{Z}}$ el subgrupo de \mathbb{Q}^d generado por $\beta_1^i, \dots, \beta_j^i$.
2. $D_j^i := C[\beta_j^i, \beta_{j+1}^i] \cap \mathbb{Q}^d$.
3. $D_{\beta_j^i, \beta_{j+1}^i}$ el conjunto de vértices del hipercubo de vértices β_j^i, β_{j+1}^i ; es decir: $\{\beta_j^i + (\beta_{j+1}^i - \beta_j^i)^J \mid J \subset I\}$.
4. Para cada $\delta \in D_j^i$, $n_\delta := \min\{l \mid l \cdot \delta \in N_j^i\}$. En particular $n[j]_J$ es el correspondiente al vértice $\beta_j^i + (\beta_{j+1}^i - \beta_j^i)^J$. Llamaremos $n[j] := \max\{n[j]_J + n[j]_K \mid J, K \subset I\}$.
5. $K_j^i := \{\delta \in D_j^i \mid \delta \neq \beta_j^i, \beta_{j+1}^i \text{ y } n_\delta \leq n[j]\}$.
6. $H_j^i := \{v(h^{(\delta)}) \mid \delta \in K_j^i\} \cup \{v(h^{\beta_j^i})\}$.

Nótese que si tomamos una curveta con respecto a $f_i, h^{(\delta)}, \delta \in D_j^i$, se tiene que $h^{(\delta)}$ es comparable con f y además $k(f, h) = k(f_i, h) \geq k(f_j, h)$ para $j \neq i$. Por lo tanto tiene sentido el conjunto definido en el último apartado.

Lema 2.3.14. *Sea $h \in \hat{C}_f$ y supongamos que $k(f, h) = k(f_i, h)$. Entonces $k(f, h) \in D_j^i$ para algún $j = 0, 1, \dots, s_i$.*

Demostración: Ya sabemos que existe un i tal que $k(f_i, h) \in C_i = C[\lambda_i, \lambda_{i+1}] \cap \mathbb{Q}^d$. Basta por tanto demostrar que si $k(f_i, f_j) \in C_i$, entonces o bien $k(f_i, h) \geq k(f_i, f_j)$ o bien $k(f_i, h) \leq k(f_i, f_j)$. Pero esto es una consecuencia de la Proposición 2.2.2, ya que si $k(f_i, h)$ no es comparable con $k(f_i, f_j)$ entonces $k(f_i, h)$ no es comparable con $k(f_j, h)$ lo cual es absurdo. \square

Lema 2.3.15. *Sean $q_1, q_2 \in D_j^i$. Sean h_1, h_2 y h curvetas de f_i por q_1, q_2 y $q = q_1 * q_2$ respectivamente. Entonces son equivalentes:*

1. $v(h) = v(h_1) + v(h_2)$.
2. $v_i(h) = v_i(h_1) + v_i(h_2)$.

3. $\deg(h_1) + \deg(h_2) = \deg(h)$.

Demostración: La equivalencia de los dos últimos apartados ya es conocida y por supuesto el primero implica en particular el segundo. Veamos que el tercero implica el primero. Sea $j \neq i$ y $k = k(f_i, f_j)$. Hay que probar que para todo $j \neq i$, $v_j(h) = v_j(h_1) + v_j(h_2)$ si $\deg(h) = \deg(h_1) + \deg(h_2)$. Se pueden dar los siguientes casos:

(i) Si $k(f_i, f_j) > q_1, q_2, q_1 * q_2$, entonces la prueba es la de la Proposición 2.3.6.

(ii) Si $k(f_i, f_j) < q_1, q_2, q_1 * q_2$.

Se tiene que $\delta = k(f_j, h_1) = k(f_j, h_2) = k(f_j, h) < q_1$ y que $c := c(h_1, f_j) = c(h_2, f_j) = c(h, f_j)$. Por lo tanto obtenemos que

$$\rho(h_1, f_j) = \text{def}(h_1)(e_c \delta + \sum_{k=1}^c (e_{k-1} - e_k) \lambda_k^j),$$

$$\rho(h_2, f_j) = \text{def}(h_2)(e_c \delta + \sum_{k=1}^c (e_{k-1} - e_k) \lambda_k^j),$$

$$\rho(h, f_j) = \text{def}(h)(e_c \delta + \sum_{k=1}^c (e_{k-1} - e_k) \lambda_k^j).$$

Luego $\rho(h_1, f_j) + \rho(h_2, f_j) = \rho(h, f_j) \Leftrightarrow \deg(h) = \deg(h_1) + \deg(h_2)$.

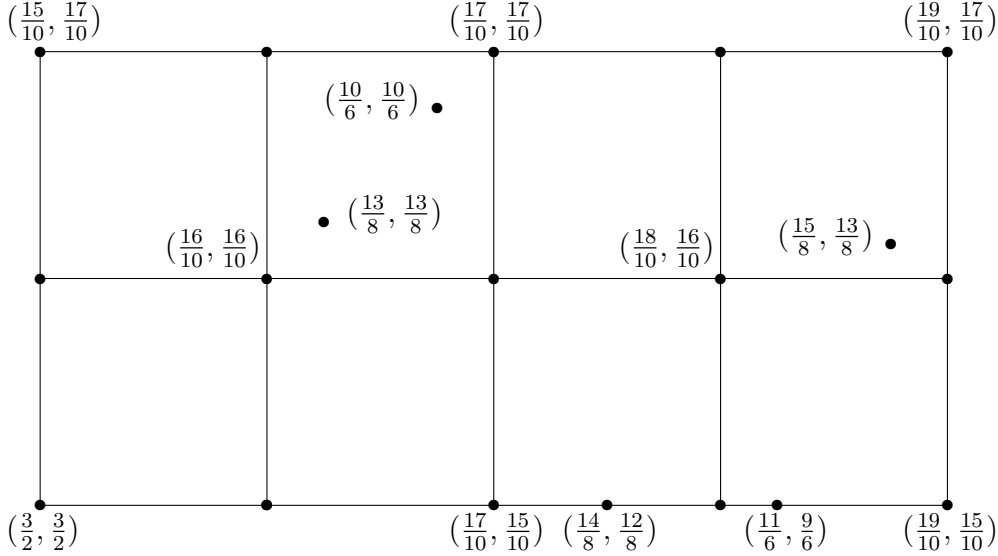
□

Teorema 2.3.16. *El conjunto $H := \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=1}^{s_i} H_j^i$ es un conjunto de generadores del semigrupo $S(f)$. Más concretamente, sea $h \in \hat{C}_f$ irreducible y supongamos que $k(f, h) = k(f_i, h) \in D_j^i$. Entonces $v(h)$ es suma de elementos de H_j^i .*

Demostración: Después del lema anterior se trata de demostrar que $v_i(h)$ es suma de las correspondientes proyecciones i -ésimas de los valores del conjunto H_j^i . Pero este resultado es evidente por el Teorema 2.3.10 en el caso $j < s_i$ y por 2.3.11 si $j = s_i$. □

Frecuentemente identificaremos el conjunto de generadores descrito en el Teorema 2.3.16 con el conjunto de puntos que nos proporcionan las curvetas en las que evaluar, es decir, identificamos H_j^i con K_j^i para todo i, j .

Ejemplo 2.3. Consideramos la hipersuperficie casi-ordinaria irreducible con exponentes característicos $\lambda_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ y $\lambda_2 = (\frac{19}{10}, \frac{17}{10})$. En el siguiente dibujo representamos los puntos $\delta \in C[\lambda_1, \lambda_2] \cap \mathbb{Q}^d$ tal que una curveta h_δ por δ verifica que $n_\delta \leq 5$.



Aunque según el Teorema 2.3.16 deberíamos tomar K_1^1 que son aquellos que verifican $n_\delta \leq 10$.

Es fácil ver que de entre los puntos con $n_\delta \leq 5$ los únicos generadores son $\{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{10}{6}, \frac{10}{6}), (\frac{11}{6}, \frac{9}{6}), (\frac{15}{8}, \frac{13}{8}), (\frac{19}{10}, \frac{15}{10}), (\frac{15}{10}, \frac{17}{10}), (\frac{17}{10}, \frac{17}{10}), (\frac{19}{10}, \frac{17}{10})\}$. Con un poco más de trabajo (viendo uno a uno) se puede comprobar que aquellos con $6 \leq n_\delta \leq 10$ también están generados por los anteriores, luego son todos los puntos generadores de C_1 .

Dados i, j es evidente que los árboles G_i y G_j coinciden hasta alcanzar $k(f_i, f_j)$, es decir, si tenemos que $k(f_i, f_j) = \beta_i^i = \beta_l^j$ entonces $t = l$ y $\beta_k^i = \beta_k^j$ para $k \leq t$. Identificando ambos árboles hasta $k(f_i, f_j)$ y procediendo de la misma manera con todos los demás obtenemos un árbol G_f que codifica toda la información de los exponentes característicos de cada rama y los órdenes de coincidencia entre diferentes ramas. El árbol que hemos descrito es el **árbol de Eggers-Wall** de f si se le añade, para cada $i = 1, \dots, r$ un punto que se une al último punto de G_i y se le etiqueta con ∞ , este punto es para distinguir cada componente irreducible ya que podría suceder que todas las ramas del árbol fueran juntas hasta el final, en cuyo caso no se distinguiría cuántas ramas tiene el árbol. Por simetría con el grafo dual, nosotros dibujaremos a estos puntos con una flecha en vez de con un punto etiquetado con infinito.

Nosotros, además en cada uno de los segmentos $[\beta_j^i, \beta_{j+1}^i]$ incorporamos como etiqueta el conjunto K_j^i de valores de curvetas h^δ relativas a f_i con orden de coincidencia $\delta \in C[\beta_j^i, \beta_{j+1}^i] \cap \mathbb{Q}^d$ y $n_\delta \leq n[j]$.

Tanto el conjunto de generadores descrito en el Teorema 2.3.16 como el árbol de Eggers-Wall generalizan en cierto modo al conjunto de generadores descrito en [19] y al grafo dual para el caso de curvas planas. La diferencia es que en el caso de curvas el grafo dual se construye a partir de la resolución minimal lo cual permite calcular un conjunto minimal de generadores, en nuestro caso esto no es posible (no existe una única resolución) solo podemos dar una cota. También la idea que se muestra en [19], de describir los generadores del semigrupo a través del grafo dual nos ha motivado para hacer un desarrollo paralelo, en la medida de lo posible.

Merece la pena describir primero el conjunto obtenido en [19] para ver cual es la simetría.

Supongamos por el momento que f es una curva plana singular. Sea A_f el grafo dual o grafo de la resolución. Para cada vértice $\alpha \in A_f$ denotamos por $w(\alpha)$ el número de vértices en A_f que están conectados con α . Aquellos vértices $\alpha \in A_f$ que verifican: $w(\alpha) = 2$ los llamamos puntos ordinarios, $w(\alpha) \geq 3$ los llamamos puntos puntos estrella y si $w(\alpha) = 1$ los llamamos puntos finales. Sea ε el conjunto de puntos finales junto con $\underline{0}$, ya que es posible que $n(\underline{0}) \neq 1$. Un arco en A_f es una sucesión de puntos que están conectados unos con otros y que son todos ordinarios menos los extremos. Cuando uno de los extremos es un punto final se le llama **arco muerto**, denotamos por \mathcal{D} el conjunto de arcos muertos de A_f . Sea $B \in \mathcal{D}$ un arco muerto con extremos ρ_B el punto final y σ_B el punto estrella. Obsérvese que $\varepsilon = \{\rho_B\}_{B \in \mathcal{D}} \cup \{\underline{0}\}$. Para cada componente irreducible denotamos por Υ_i la geodésica que une el punto $\underline{0}$ con el punto de mayor peso, α_i , es decir, el último punto que aporta la componente i -ésima a A_f .

Teorema 2.3.17 (Theorem 2, [19]).

El conjunto minimal de generadores del semigrupo de f esta formado por el conjunto de valores en curvetas por los puntos:

$$\alpha \in \varepsilon \cup \left(\bigcup_{i=1}^r \Upsilon_i - \bigcap_{i=1}^r \Upsilon_i - \{\sigma_B : B \in \mathcal{D}\} \right)$$

mas los conjuntos infinitos de valores $v(h^{\alpha_i}) + (0, \dots, k, \dots, 0)$, k está en el lugar i -ésimo, para $i = 1, \dots, r$.

A continuación describimos un algoritmo para una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible que usa los resultados que hemos descrito hasta el momento para dar un conjunto de generadores, evidentemente sobre abundantes para una sola componente irreducible pero que no lo es tanto cuando hay varias.

Algoritmo 2.1. Sea $(S, 0)$ una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_g$ sus exponentes característicos. Recordar que están escritos de manera que el denominador que le corresponde es $\deg(h_{\lambda_j}) = n_1 \cdots n_j$ siendo h_{λ_j} una curveta por λ_j , $j = 1, \dots, g$.

- **Primer exponente:** Denotamos por $\underline{0} := (0, \dots, 0)$ y por $n_1 = \deg(h_{\lambda_1})$. Sean $M_0 = \mathbb{Z}^d$, $M_1 = \mathbb{Z}^d + \mathbb{Z}\lambda_1$ y $E_1^0 = \underline{0}, \dots, E_{2^d}^0 = \lambda_1$ los elementos del conjunto $C_{\underline{0}, \lambda_1}$ con grados $N_0 = 1, N_1, \dots, N_{2^d} = n_1$ respectivamente. Sea $n[0] = \max\{N_i + N_j : i, j \in \{1, \dots, 2^d\}\}$. Calculamos $K_0 = \{\delta \in C_0 \mid n_\delta \leq n[0]\}$.

Para representarlo dibujamos un punto que representa al origen y por tanto le asignamos peso $\underline{0}$, lo unimos a otro punto que representa todos los puntos de K_0 y para remarcar este hecho en vez de dibujar un punto dibujamos un cuadrado, asimismo unimos este cuadrado a otro punto que representa a λ_1 . Por último y para que haya una simetría con el caso de curvas dibujamos un punto unido únicamente a λ_1 con peso $q > \lambda_1$ y $q \in M_0$. Este punto representa a una 0-semi raíz de f .

- **Exponente $(j - 1) \rightarrow j$:** Supongamos que ya hemos hecho los pasos hasta el exponente $(j - 1)$, es decir, para $k = 1, \dots, j - 1$ hemos considerado los conjuntos K_k y están representados en el grafo por un cuadrado y unidos por segmentos a λ_{k-1} y λ_k respectivamente. También tenemos un punto de $M_{k-1} \cap C_k$ unido a λ_k que representa una $k - 1$ -semi raíz de f .

- **Exponente j -ésimo:** Estamos en C_j y trabajamos con el retículo $M_j = \mathbb{Z}^d + \langle \lambda_1, \dots, \lambda_j \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$. Consideramos los vértices de $C_{\lambda_{j-1}, \lambda_j}$ que son $E_1^j = \lambda_{j-1}, \dots, E_{2^d}^j = \lambda_j$ tal que $n_{E_k^j} = N_k^j$ para $k = 1, \dots, 2^d$. Sea $n[j] = \max\{N_k^j - N_{k'}^j \mid k, k' \in \{1, \dots, 2^d\}\}$, calculamos $K_j = \{\delta \in C_j \mid n_\delta \leq n[j]\}$.

Nos situamos en λ_{j-1} y dibujamos un nuevo segmento que lo une con K_j , el cual representamos mediante un cuadrado, asimismo este lo unimos a λ_j . Finalmente, unimos a λ_j un punto de $M_j \cap C_{j+1}$ que es una $j - 1$ -semi raíz de f , le asignamos como etiqueta cualquier punto q con $n_q = n_j$. Este último punto, que lo unimos únicamente al exponente característico, es un arco muerto.

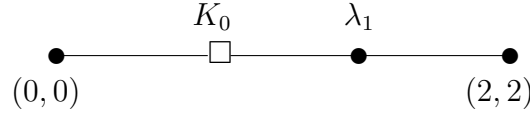
Tras hacer C_0, \dots, C_{g-1} hemos acabado ya que toda curveta por un punto de $q \in C_g = A_g$ se pone como múltiplo de una curveta por $q \in C_g \cap M_{g-1}$, que ya están representadas en el grafo.

Ejemplo 2.4. Sea f la ecuación de una singularidad casi-ordinaria irreducible con raíz $\xi = X_1^{3/2} X_2^{3/2} + X_1^{7/4} X_2^{7/4}$.

En primer lugar, como $\lambda_1 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $M_0 = \mathbb{Z}^2$ y C_{0, λ_1} es el conjunto $\{\underline{0}, (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{0}{2}), (\frac{0}{2}, \frac{3}{2})\}$. Luego $n[0] = 4$ y $K_0 = \{(0, 0), (1, 1), (1, 0), (0, 1)\} \cup$

$\{(\frac{3}{2}, \frac{0}{2}), (\frac{0}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})\} \cup \{(\frac{5}{4}, \frac{0}{4}), (\frac{5}{4}, \frac{5}{4}), (\frac{0}{4}, \frac{5}{4}), (\frac{4}{3}, \frac{0}{3}), (\frac{0}{3}, \frac{4}{3}), (\frac{4}{3}, \frac{4}{3})\}$. Se puede ver fácilmente que el último conjunto no es necesario.

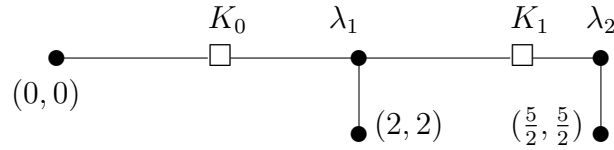
Así el grafo hasta este momento es:



El segundo exponente característico es $\lambda_2 = (\frac{7}{4}, \frac{7}{4})$ y

$$C_{\lambda_1, \lambda_2} = \{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (\frac{14}{8}, \frac{12}{8}), (\frac{12}{8}, \frac{14}{8}), (\frac{7}{4}, \frac{7}{4})\}.$$

Como $M_1 = \mathbb{Z}^2 + \lambda_1 \mathbb{Z}$ es claro que $n[1] = 6$ y que $K_1 = C_{\lambda_1, \lambda_2} \cup \{(\frac{17}{10}, \frac{15}{10}), (\frac{15}{10}, \frac{15}{10}), (\frac{15}{10}, \frac{17}{10}), (\frac{20}{12}, \frac{18}{12}), (\frac{18}{12}, \frac{20}{12}), (\frac{20}{12}, \frac{20}{12})\}$. Es evidente que el último conjunto también sobra.



Tal y como indica el Teorema 2.3.16 los valores de los elementos $\bigcup_{j=1}^{g_i-1} K_j^i$ son los generadores para cada componente irreducible ($i = 1, \dots, r$). Ahora, se trata de "pegar" la información de todas las componentes irreducibles. Para el caso reducible hay que poner de manifiesto en el grafo la información que aportan todas las componentes irreducibles, y unir las según indique los ordenes de contacto entre pares de componentes irreducibles.

Algoritmo 2.2. Sea $(S, 0)$ una hipersuperficie casi-ordinaria con r componentes irreducibles. Sean $\lambda_1^i, \dots, \lambda_{g_i}^i$ los exponentes característicos de la componente i -ésima y sean $k(f_i, f_j)$, $j \neq i$, los ordenes de contacto de la componente i -ésima con el resto, denotamos por $G_i := \{0 = \beta_0^i < \beta_1^i < \beta_2^i < \dots < \beta_{s_i}^i\} = \{\lambda_j^i\}_{j=1}^{g_i} \cup \{k(f_i, f_j)\}_{j \neq i}$. Otra apreciación importante es que si β_j^i es un orden de contacto, entonces en el hipercubo que definen β_j^i, β_{j+1}^i no se cambia el retículo con respecto a β_{j-1}^i, β_j^i ya que seguimos trabajando dentro del mismo hipercubo $D_j^i = C[s_{j-1}^i, s_{j+1}^i] \cap \mathbb{Q}^d$.

(I) Primera Componente irreducible.

Realizamos el Algoritmo 2.1 para G_1 , de manera que los ordenes de contacto juegan el mismo papel que los exponentes característicos con dos cambios importantes. Si es un orden de contacto no se le agrega un arco muerto. Además, si $\delta \in G_1$ es el primer orden de contacto que aparece en G_1 , no se ponen etiquetas a los segmentos que unen dos puntos consecutivos $a, b \in G_1$ con $a, b \leq \delta$. Como ya dijimos en la Nota 2.6, para la parte común de todas las ramas, los valores por curvetas $\lambda \not\geq \delta$ se comportan como el semigrupo de una sola componente irreducible h_δ con raíz una truncación por δ . Por lo que los únicos generadores en esa parte común vienen dados por los valores las semi raíces de h_δ . Por último se añade una flecha para señalar al último punto de $\alpha^1 \in G_1$, así indicamos que hay una componente irreducible y de paso nos sirve para generar $K_{s_1}^1 = \{\alpha \in M_{g_1} \mid \alpha \geq \alpha^1\}$. De esta manera, obtenemos un grafo que denotamos por F_1 .

(II) Componentes irreducibles sucesivas.

Para cada $i = 2, \dots, r$ denotamos por F_{i-1} el grafo con pesos obtenido tras añadir la sucesión G_j de f_j con $j < i$. Supongamos que hemos acabado el paso $i - 1$, sea F_i el grafo con pesos actual que inicializamos a $F_i := F_{i-1}$. Se trata de incluir la información que aporta la nueva componente f_i en función del orden de contacto $k_{f_i} = \max\{k(f_i, f_j) \mid j < i\}$ de la componente i -ésima con la hipersuperficie $f_1 \cdots f_{i-1}$. Podemos suponer que $k_{f_i} = k(f_i, f_1)$.

- (i) $k_{f_i} \neq \lambda_j^1$.

Sabemos que k_{f_i} existe en el grafo F_{i-1} . Luego nos situamos en k_{f_i} , dibujando conectado a él un nuevo grafo pesado F que calculamos como en el Algoritmo 2.1 hasta acabar la sucesión G_i , es decir, $\beta_k^i > k_{f_i}$. Luego $F_i := F_i \cup F$.

- (ii) $k_{f_i} = \lambda_j^1$.

Sea q el punto que representa todas las truncaciones de f_1 por λ_j^1 con exceso q y que esta unido a λ_j^1 por una arista. Si k_{f_i} no es un exponente característico de f_i borramos tanto la arista como el punto q . En ambos casos (sea un exponente característico o no) nos situamos en k_{f_i} . Desarrollamos el Algoritmo 2.1 hasta acabar la sucesión G_i , es decir, $\beta_k^i > k_{f_i}$. Luego $F_i := F_i \cup F$.

Al final hemos obtenido un grafo que identificamos con $F_r = F_f$ y que contiene toda la información conjunta de todas las ramas. Solo falta por representar en el grafo los conjuntos infinitos $H_{s_i}^i$, que describimos en el Corolario 2.3.12. Para ello marcamos el último punto α^i que aporta cada componente irreducible al grafo F_f con una flecha, ya que $K_{s_i}^i = \{\alpha \in M_{g_i} \mid \alpha \geq \alpha^i\}$.

Es claro del algoritmo anterior que el árbol de Eggers-Wall es equivalente al grafo F_f . Por tanto, se tiene el siguiente teorema que recoge varios resultados descritos anteriormente.

Teorema 2.3.18. *Sea f la ecuación de una hipersuperficie casi-ordinaria. Son equivalentes:*

1. *El árbol de Eggers-Wall de f .*
2. *El grafo obtenido como resultado de aplicar el Algoritmo 2.2 a f .*
3. *El semigrupo de f .*

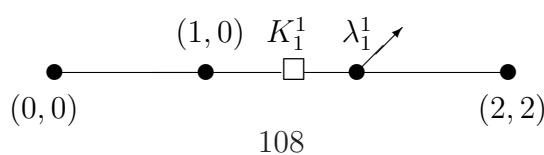
Demostración: La entrada del Algoritmo 2.2 son los exponentes característicos de cada componente irreducible junto con los órdenes de coincidencia entre pares de componentes, es decir, los datos que conforman el árbol de Eggers-Wall. Luego 1 implica 2, pero a su vez el grafo F_f contiene algo más de información que el árbol de Eggers-Wall, además de lo ya mencionado tiene: unas etiquetas extras en cada segmento, flechas para indicar los conjuntos infinitos de cada componente irreducible y los arcos muertos, luego borrando esta información obtenemos el árbol de Eggers-Wall. Por lo que 1 y 2 son equivalentes.

Del Teorema 2.3.16 sabemos construir un sistema de generadores del semigrupo de f a partir de los valores en curvetas que se indican en el grafo F_f . Luego 2 implica 3.

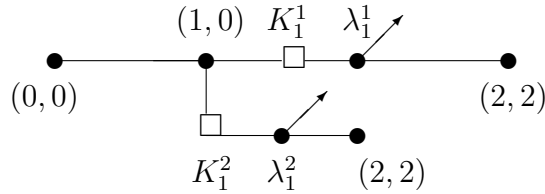
Por otra parte, por el Teorema 2.2.15 sabemos que del semigrupo se pueden deducir los exponentes característicos de cada componente irreducible y los órdenes de coincidencia entre pares de ellas. Luego 3 implica 1. \square

Ejemplo 2.5. Sea f la ecuación de una singularidad casi-ordinaria con componentes irreducibles, f_1 de raíz $\xi_1 = X_1^{3/2} X_2^{3/2}$, f_2 de raíz $\xi_2 = \alpha X_1^1 + X_1^{3/2} X_2^{3/2}$ con $\alpha \neq 0$.

Teniendo en cuenta que el orden de contacto $k(f_1, f_2) = (1, 0)$, el grafo que aporta f_1 modificado es,

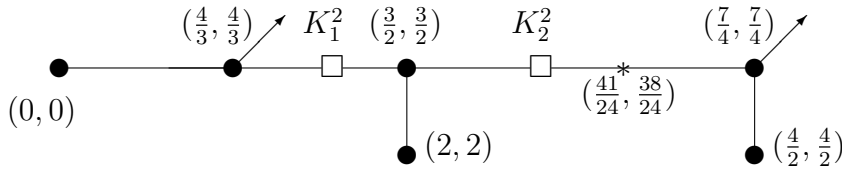


Donde $K_1^1 = \{(1, 1)\}$. Según el algoritmo estamos en el caso (i), y por tanto obtenemos



Donde ahora $K_1^1 = K_1^2 = \{(1, 1)\}$.

Ejemplo 2.6. Consideramos la superficie casi-ordinaria de ecuación $f = f_1 f_2$ y con raíces $\zeta_1 = X_1^{4/3} X_2^{4/3}$ y $\zeta_2 = X_1^{6/4} X_2^{6/4} + X_1^{7/4} X_2^{7/4}$ respectivamente. Además consideramos h con raíz $\zeta_h = X_1^{6/4} X_2^{6/4} + X_1^{41/24} X_2^{38/24}$. El siguiente dibujo sería la salida del Algoritmo 2.2 para f .



Donde,
 $K_0^1 = \{(\frac{0}{3}, \frac{4}{3})(\frac{4}{3}, \frac{0}{3})\}$, $K_1^2 = \{(\frac{9}{6}, \frac{8}{6}), (\frac{8}{6}, \frac{9}{6})\}$ y $K_2^2 = \{(\frac{14}{8}, \frac{12}{8}), (\frac{12}{8}, \frac{14}{8})\}$. Calculamos los valores en algunos de los puntos marcados:

- $v(h_{(\frac{2}{1}, \frac{2}{1})}) = [(4/3, 4/3), (3/2, 3/2)].$
- $v(h_{(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})}) = [(8/3, 8/3), (3, 3)].$
- $v(h_{(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})}) = [(4, 4), (4, 4)].$
- $v(h_{(\frac{4}{2}, \frac{4}{2})}) = [(8/3, 8/3), (13/4, 13/4)].$
- $v(h_{(\frac{7}{4}, \frac{7}{4})}) = [(16/3, 16/3), (26/4, 26/4)].$

- $v(h_{\frac{6}{4}, \frac{7}{4}}) = [(\frac{32}{3}, \frac{32}{3}), (12, 13)]$.
- $v(h_{\frac{7}{4}, \frac{6}{4}}) = [(\frac{32}{3}, \frac{32}{3}), (13, 12)]$.

A continuación calculamos el valor en h :

$$[(h, f_1), (h, f_2)] = [(64, 64), (77, 74)].$$

Por el Teorema 2.3.16 sabemos que $(\frac{41}{24}, \frac{38}{24})$ se alcanza como sumas de Farey de los elementos de $C_{a,b}$ con $a = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ y $b = (\frac{7}{4}, \frac{7}{4})$, aunque no damos un método que nos describa como. No es difícil darse cuenta que en este caso se verifica que $(\frac{41}{24}, \frac{38}{24}) = 4(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) * 4(\frac{7}{4}, \frac{7}{4}) * 3(\frac{7}{4}, \frac{6}{4})$. Por tanto el valor $v(h) = [(64, 64), (77, 74)]$ se pone en función del valor de sus aproximantes. Para comprobarlo basta considerar $4v(h_a) + 4v(h_b) = [(32, 32), (38, 38)]$ y $3v(h_{\frac{7}{4}, \frac{3}{2}}) = [(32, 32), (39, 36)]$, de manera que $[(32, 32), (38, 38)] + [(32, 32), (39, 36)] = [(64, 64), (77, 74)]$.

Capítulo 3

La Serie de Poincaré de una Hipersuperficie Casi-Ordinaria

Buena parte de los resultados de este capítulo son consecuencia de un trabajo conjunto con P.D. González Pérez y están recogidos en [50].

McEwan y Némethi calculan en [79] la Función Zeta de una hipersuperficie irreducible casi-ordinaria. Los mismos autores junto con González Pérez en [51] calculan la Función Zeta de una hipersuperficie casi-ordinaria (no necesariamente irreducible). Al mismo tiempo proponen el siguiente problema en [78]:

calcular la serie de Poincaré de una hipersuperficie casi-ordinaria, y si es posible compararla con la correspondiente Función Zeta.

Este problema fue una de las motivaciones del comienzo de la línea de trabajo que nos ha conducido a los resultados recogidos en este capítulo. Nuestro objetivo es resolverlo en el caso irreducible. La serie de Poincaré asociada a una multi-filtración (ver [17]-[27]) tiene sentido para valoraciones centradas en el origen. Nosotros definimos la serie de Poincaré asociada al conjunto de valoraciones esenciales, que no están necesariamente centradas en el origen. Por ello se hace necesaria la introducción y estudio de un anillo “multi-graduado” (concepto que sustituye a la multi-filtración) que nos permite definir una serie de Poincaré. Además, como consecuencia de este estudio deducimos una caracterización de las deformaciones equisingulares de hipersuperficies singulares en términos de la serie de Poincaré. Esto es posible porque la serie de Poincaré nos permite recuperar el semigrupo, el cual contiene toda la información topológica de la singularidad. Es decir, la serie de Poincaré es un invariante completo de la singularidad. Finalmente, escribimos la serie de Poincaré como la integral con respecto a la característica

de Euler.

Clásicamente, la serie de Poincaré es una manera de codificar en una serie la dimensión de cada componente homogénea de una estructura graduada. Ahora damos una definición más precisa siguiendo [6] y [90]. También revisamos los posibles puntos de vista en el caso particular de singularidades.

Sea k un cuerpo, consideramos $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ una k -álgebra Noetheriana graduada y $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ un A -módulo graduado y finitamente generado. Puesto que M es finitamente generado, es fácil ver que $\dim_k M_n < \infty$, denotamos a dicha dimensión por $d(n)$. La **serie de Poincaré** de M se define como, $P_M(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d(n)t^n$.

En teoría de singularidades la situación es un poco más concreta. Sea $(S, 0)$ una singularidad sobre \mathbb{C} . Consideramos (R, m) el anillo local de funciones en el origen y $\mathbb{C} = R/m$ el cuerpo residual. Tomamos, $R = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ una filtración por ideales de R . Aquí M es el \mathbb{C} -álgebra graduada, $grR = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (I_n/I_{n+1})$, Teissier introduce este álgebra en el caso de curvas planas irreducibles (ver [96]). Para todo n , los cocientes $J_n = I_n/I_{n+1}$ son espacios vectoriales, denotamos por $c_n = \dim_k(J_n)$ su dimensión. Pero también se puede considerar $l_n = l(R/I_n)$, la longitud. En la literatura hay dos posibles interpretaciones de la serie de Poincaré, dependiendo de si se toma c_n en cuyo caso $P_M(t) = \sum_{n \geq 0} c_n t^n$, o l_n entonces $P_M(t) = \sum_{n \geq 0} l_n t^n$.

Una filtración $\{I_i\}_{i \geq 0}$ por subespacios vectoriales de R , se define con una función $v : R \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$, $v(g) = \sup\{i \mid g \in I_i\}$, verificando las propiedades:

$$v(\lambda g) = v(g) \quad \text{para } \lambda \in \mathbb{C}^* \quad \text{y} \quad v(g_1 + g_2) \geq \min\{v(g_1), v(g_2)\}. \quad (3.1)$$

Aunque es muy común usar valoraciones para definir las filtraciones, es decir, v tiene una propiedad más, $v(g_1 g_2) = v(g_1) + v(g_2)$. De hecho dada ν una valoración, I_n se define como el conjunto $\{g \in R \mid \nu_n(g) \geq n\}$. El hecho de que ν es una valoración nos garantiza que I_n es realmente un ideal de R y obviamente $I_n \supseteq I_{n+1}$.

Si en vez de considerar una valoración consideramos varias, ν_1, \dots, ν_r , esto produce una multi-filtración. Para cada $\underline{n} = (n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, $I_{\underline{n}} = \{g \in R \mid (\nu_1(g), \dots, \nu_r(g)) \geq \underline{n}\}$. Ahora, $M = \bigoplus_{\underline{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} I_{\underline{n}}/I_{\underline{n}+1}$, donde $\underline{1} = (1, \dots, 1)$. De nuevo hay dos posibles definiciones para la serie de Poincaré,

$$P_M(\underline{t}) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} c_{\underline{n}} t^{\underline{n}}, \text{ donde } c_{\underline{n}} = \dim_{\mathbb{C}}(I_{\underline{n}}/I_{\underline{n}+1}). \quad (3.2)$$

$$P_M(\underline{t}) = \sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r} l_{\underline{n}} t^{\underline{n}}, \text{ donde } l_{\underline{n}} = \text{length}(R/I_{\underline{n}}). \quad (3.3)$$

Ambas definiciones tienen sentido sólo cuando c_n (resp. l_n) son finitas para todo n . Esto ocurre cuando los cocientes $I_{\underline{n}}/I_{\underline{n}+\underline{1}}$ (resp. $R/I_{\underline{n}}$) son espacios vectoriales de dimensión finita, o equivalentemente cuando $\underline{n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, existe N tal que $m^N \subset I(\underline{n})$. En particular, esto es cierto cuando las filtraciones están definidas por valoraciones centradas en el origen.

Campillo, Delgado y Gusein-Zade han calculado la serie de Poincaré en varias situaciones, usando la definición (3.2) con una pequeña modificación, ellos definen la serie de Poincaré como,

$$P(\underline{t}) = \left(\sum_{\underline{n} \in \mathbb{Z}^r} c_{\underline{n}} t^{\underline{n}} \right) \frac{\prod_{i=1}^r (t_i - 1)}{\underline{t} - 1}. \quad (3.4)$$

En general la manera de calcularla es integrando con respecto a la característica de Euler.

Para curvas planas singulares usan las valoraciones inducidas por cada componente irreducible, es decir, la multiplicidad de intersección con cada componente (ver [23]). La mismas valoraciones se usan para curvas sobre superficies racionales singulares (ver [27]).

Para superficies racionales singulares $(S, 0)$ se considera la resolución minimal $\pi : (X, E) \rightarrow (S, 0)$. Para cada componente irreducible E_i , $i = 1, \dots, r$ del divisor excepcional E toman la correspondiente valoración divisorial ν_i , obteniendo una multi-filtración (ver [25]).

Siguiendo la definición (3.4) Galindo calcula la serie de Poincaré de una valoración divisorial plana (ver [44]) y Delgado con Gusein-Zade la calculan para varias valoraciones divisoriales planas (ver [35]). Ebeling y Gusein-Zade consideran la filtración del anillo de funciones R de una variedad analítica compleja $(S, 0)$, obtenida con la valoración $\hat{v}(g) = \min_{\{\phi\}} v_{\phi}(g)$, $\forall g \in R$, donde v_{ϕ} es la valoración inducida por el arco ϕ en $(S, 0)$ (ver [38]). Lemaiheu resuelve el caso tórico (ver [72]).

Por otra parte Cutkosky, Herzog y Reguera usan la definición (3.3) para la serie de Poincaré. Dan condiciones para que la serie de Poincaré de una superficie singular sea racional (ver [30]), usando como filtración la obtenida con las valoraciones divisoriales asociadas a los divisores de una resolución. La relación entre esta serie de Poincaré y la definida en (3.4) viene dada en [25] para superficies racionales.

Hay en la bibliografía casos en los que las filtraciones no se obtienen por valoraciones. Ebeling y Gusein-Zade calculan la serie de Poincaré de una hipersuperficie quasi-homogénea singular (ver [40]) y singularidades quasi-homogéneas que son intersección completa (ver [39]). Ellos definen $I_n = \{g \in R \mid g(\lambda \cdot x) = \lambda^n g(x)\}$.

A continuación damos una breve introducción con los conceptos necesarios para la lectura de este capítulo.

3.1. Repaso de Geometría Tórica

En esta sección fijaremos algunas notaciones y revisaremos algunos conceptos de geometría tórica que usaremos en lo que resta de la memoria (ver [81], [42] o [43] para más detalles). Sea N un retículo denotamos por M su dual, por $N_{\mathbb{R}}$ el espacio vectorial real generado por N y por \langle, \rangle el producto escalar canónico entre los retículos N y M (resp. espacios vectoriales $N_{\mathbb{R}}$ y $M_{\mathbb{R}}$). Un *cono poliédrico racional convexo* τ en $N_{\mathbb{R}}$, un *cono* en lo que sigue, es el conjunto $\tau := \text{pos}(a_1, \dots, a_s)$ de combinaciones lineales reales con coeficientes no negativos de elementos $a_1, \dots, a_s \in N$. El cono τ es *estrictamente convexo* si τ no contiene subespacios lineales de dimensión mayor que 0. Denotamos por $\overset{\circ}{\tau}$ el *interior relativo* del cono τ (i.e. el interior en el mínimo subespacio lineal real que le contiene). El cono *dual* τ^\vee (resp. cono *ortogonal* τ^\perp) de τ es el conjunto $\{w \in M_{\mathbb{R}} / \langle w, u \rangle \geq 0 \ \forall u \in \tau\}$ (resp. $\{w \in M_{\mathbb{R}} / \langle w, u \rangle = 0 \ \forall u \in \tau\}$).

Un *abanico* Σ es una familia de conos estrictamente convexos en $N_{\mathbb{R}}$ de manera que cada cara del cono está también en la familia y la intersección dos cualesquiera de ellos es una cara de ambos. Si τ es un cono del abanico Σ , el semigrupo $\tau^\vee \cap M$ es finitamente generado, genera el retículo M y la variedad $Z_{\tau, N} = \text{Spec } k[\tau^\vee \cap M]$ es normal. Cuando el retículo este claro en el contexto, usaremos Z_τ para denotar $Z_{\tau, N}$. Las variedades afines Z_τ correspondientes a los conos del abanico Σ se pegan formando una *variedad tórica normal* Z_Σ . El toro $T_N := Z_{\{0\}} \cong (k^*)^{\text{rk } N}$ está contenido en Z_Σ como un subconjunto abierto denso y además el toro T_N actúa en Z_Σ extendiendo la acción del toro en si mismo por multiplicación. Hay una biyección entre los interiores relativos de los conos del abanico y las órbitas de la acción del toro, $\overset{\circ}{\tau} \mapsto \text{orb}_{Z_\Sigma}(\tau)$. Denotamos a la orbita por $\text{orb}_{Z_\Sigma}(\tau)$ o también por $\text{orb}(\tau)$. Cuando la variedad tórica Z_Σ esté clara en el contexto usaremos $\text{orb}(\tau)$ para denotar a la orbita por $\text{orb}_{Z_\Sigma}(\tau)$ asociada a τ .

Decimos que un abanico Σ' es un *refinamiento* o una *subdivisión* de Σ si

ambos abanicos tienen el mismo conjunto soporte y si cada cono de Σ' esta contenido en un cono de Σ . Todo refinamiento define un morfismo $Z_{\Sigma'} \rightarrow Z_{\Sigma}$ que es birracional y propio.

Sea M un retículo de rango d y Λ un subsemigrupo finitamente generado de M que genera a M , es decir, tal que $M := \Lambda + (-\Lambda)$. Sea $Z^{\Lambda} = \text{Spec } \mathbf{C}[\Lambda]$, donde $\mathbf{C}[\Lambda] = \{\sum_{\text{finita}} c_{\lambda} \underline{X}^{\lambda} \mid c_{\lambda} \in \mathbf{C}\}$ es la \mathbf{C} -álgebra del semigrupo, la variedad tórica definida por el semigrupo Λ (con las notaciones del párrafo anterior, Λ es el semigrupo $\tau^{\vee} \cap M$). Fijada una base del retículo M esta induce una inclusión de Λ en \mathbf{Z}^d , que se corresponde con la inclusión de $\mathbf{C}[\Lambda]$ en el anillo de polinomios de Laurent $\mathbf{C}[y_1^{\pm 1}, \dots, y_d^{\pm 1}]$, $\underline{X}^e \mapsto y_1^{e_1} \cdots y_d^{e_d}$, con (e_1, \dots, e_d) las coordenadas con respecto a la base fijada del espacio vectorial $e \in \Lambda$. El semigrupo Λ genera el cono $\sigma = \mathbf{R}_{\geq 0} \Lambda$, luego tenemos la inclusión de semigrupos $\Lambda \rightarrow \bar{\Lambda} := \sigma^{\vee} \cap M$, definiendo la modificación tórica $Z^{\bar{\Lambda}} = Z_{\sigma, N} \rightarrow Z^{\Lambda}$, que se corresponde con la *aplicación de normalización* (N es el dual de M). El cono σ^{\vee} tiene vértice si y solo si existe una órbita de dimensión cero, en dicho caso esa órbita se reduce al punto $0 \in Z^{\Lambda}$ definido por el ideal maximal $\mathfrak{m}_{\Lambda} := (\Lambda - \{0\})\mathbf{C}[\Lambda]$. El anillo $\mathbf{C}[[\Lambda]]$ es el completado del anillo local de gérmenes de funciones holomorfas en $(Z^{\Lambda}, 0)$ con respecto a su ideal maximal.

Cada vector no nulo $v \in \sigma \cap N$ define una valoración ν del cuerpo de fracciones de $\mathbf{C}[[\Lambda]]$, llamada *valoración monomial* o *valoración tórica*. Para un elemento $0 \neq \phi = \sum c_u \underline{X}^u \in \mathbf{C}[[\Lambda]]$, se define $\nu(\phi) = \min_{c_u \neq 0} \langle n, u \rangle$. Si el vector v es *primitivo* la valoración ν es además una valoración divisorial. Por tanto, es la valoración asociada al divisor D_v correspondiente al rayo $v\mathbf{R}_{\geq 0}$ en cualquier subdivisión Σ de σ , que contenga a dicho rayo. Por tanto la composición π_{Σ} con la aplicación de normalización Z^{Λ} define una modificación tórica en la cual el divisor D_v aparece y tenemos que la valoración divisorial asociada a D_v es igual a ν (ver [8], [9] o [49]).

3.2. La Serie de Poincaré asociada a una Multifiltración

Consideramos $(S, 0)$ el germen de una hipersuperficie irreducible casi-ordinaria parametrizada por ζ y con semigrupo $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}^d + \gamma_1 \mathbb{Z}_{\geq 0} + \dots + \gamma_g \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Como es habitual denotaremos también por $\lambda_1 < \dots < \lambda_g$ a la sucesión de exponentes característicos de $(S, 0)$. Sea $M = M_g$ el retículo $\mathbb{Z}^d + \lambda_1 \mathbb{Z} + \dots + \lambda_g \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^d + \gamma_1 \mathbb{Z} + \dots + \gamma_g \mathbb{Z}$, $N = N_g$ el retículo dual de M y $\rho \subset N \otimes \mathbb{R}$ el cono generado por la base dual de la base canónica de \mathbb{Z}^d . Se tiene el

isomorfismo de \mathbb{C} -álgebras $\mathbb{C}[[\underline{X}]] \simeq \mathbb{C}[[\rho^\vee \cap \mathbb{Z}^d]]$ y por tanto el anillo local de $(S, 0)$ es $R = \mathbb{C}[[\underline{X}, Y]]/(f) \simeq \mathbb{C}[[\underline{X}]][[\zeta]] \simeq \mathbb{C}[[\rho^\vee \cap \mathbb{Z}^d]][[\zeta]]$ y $\mathbb{C}[[\rho^\vee \cap M]]$ es su normalización. Como consecuencia el correspondiente morfismo

$$(\bar{S}, 0) = (Z_{\rho, N_g}, o_\rho) \xrightarrow{n} (S, 0)$$

resulta ser el morfismo de normalización de la singularidad casi-ordinaria $(S, 0)$. Señalemos que este resultado es cierto en general, es decir, para singularidades casi-ordinarias que no sean necesariamente de hipersuperficie.

A continuación consideramos ρ' un refinamiento de ρ y la modificación asociada $\pi_{\rho'} : (Z_{\rho', N_g}, E) \rightarrow (Z_{\rho, N_g}, o_\rho)$, que consiste en sucesivas explosiones normalizadas en el origen.

Sea D una componente irreducible del divisor excepcional E y ν_D la valoración divisorial (del cuerpo de fracciones K del álgebra $R = \mathbb{C}[[\underline{X}, Y]]/(f)$ de $(S, 0)$) asociada a D . Recordemos que dado $h \in K - \{0\}$, $\nu_D(h)$ es el orden de anulación de $h \circ n \circ \pi_{\rho'}$ a lo largo del divisor D . La valoración ν_D define una filtración por ideales de R : $R = P_0 \supseteq P_1 \supseteq \cdots \supseteq P_k \supseteq P_{k+1} \supseteq \cdots$, donde $P_k = \{h \in R \mid \nu_D(h) \geq k\}$. Asociado a R y D definimos el anillo graduado $gr_D(S, 0) = \bigoplus_{k \geq 0} P_k/P_{k+1}$. Es un anillo local con ideal maximal $m_D(S, 0) = \bigoplus_{k \geq 1} P_k/P_{k+1}$. Los cocientes P_k/P_{k+1} son \mathbb{C} -espacios vectoriales. Denotemos por $c_k = \dim_{\mathbb{C}}(P_k/P_{k+1})$.

Definición 3.2.1. *La serie de Poincaré de la hipersuperficie casi-ordinaria $(S, 0)$ asociada al divisor D es*

$$P_D(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k t^k. \quad (3.5)$$

Ahora nos interesa calcular el valor de c_k para cada k , para así poder dar una fórmula explícita (cerrada) de la serie de Poincaré. Para ello, recordemos que a partir del refinamiento ρ' de ρ las componentes irreducibles D del divisor excepcional E de la modificación tórica asociada $\pi_{\rho'} : (Z_{\rho', N_g}, E) \rightarrow (Z_{\rho, N_g}, o_\rho)$, se corresponden biyectivamente con las caras de dimensión uno τ de ρ' tales que $\overset{\circ}{\tau} \subset \overset{\circ}{\rho}$. Sea ahora w el vector entero primitivo en N_g tal que $\tau = w\mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces $D = D_w$ y la valoración divisorial ν_D es la valoración tórica (monomial) definida por w . Por tanto, dado $0 \neq h = \sum c_u x^u \in \mathbb{C}[[\rho^\vee \cap M]]$ entonces $\nu_D(h) = \nu_w(h) = \min\{\langle w, u \rangle \mid c_u \neq 0\}$, ver [43] para más detalles.

Proposición 3.2.2. *Sea $\mathbb{C}[\Gamma]^w = \bigoplus_{k \geq 0} H_k$ el álgebra del semigrupo Γ con la graduación inducida por el vector primitivo $w \in N_g$ y $D = D_w$ el divisor*

asociado a w . Entonces $gr_D(S, 0) \cong \mathbb{C}[\Gamma]^w$ como \mathbb{C} -álgebras graduadas. Como consecuencia

$$P_k/P_{k+1} \cong H_k = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma, \langle w, \gamma \rangle = k} \mathbb{C}x^\gamma$$

y

$$c_k = \#\{\gamma \in \Gamma \mid \langle w, \gamma \rangle = k\}.$$

Demostración: Ver Proposición 36 en [53]. \square

Fijado un vector w y Λ un subsemigrupo aditivo finitamente generado de \mathbb{Q}^d , se tiene la aplicación lineal $\langle w, \cdot \rangle : \Lambda \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por $\gamma \mapsto \langle w, \gamma \rangle$. Puesto que existe $n \in \mathbb{N}$ con $\Lambda \subset \frac{1}{n}\mathbb{Z}$ tenemos un homomorfismo de anillos $\Phi_w : \mathbb{Z}[[\Lambda]] \subset \mathbb{Z}[[\underline{u}^{1/n}]] \rightarrow \mathbb{Z}[[t^{1/n}]]$ definido por $\Phi_w(\underline{u}^\gamma) = t^{\langle w, \gamma \rangle}$ para cada monomio $\underline{u}^\gamma = u_1^{\gamma_1} \cdots u_d^{\gamma_d}$. La serie característica (o también serie de Poincaré) de Λ es, por definición, la serie

$$P_\Lambda(u_1, \dots, u_d) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \underline{u}^\lambda.$$

Proposición 3.2.3. Sea $\Gamma = \mathbb{Z}_{\geq 0}^d + \langle \gamma_1, \dots, \gamma_g \rangle$ el semigrupo de la singularidad casi-ordinaria $(S, 0)$, entonces $P_D(t)$ es la imagen por Φ_w de la serie característica de Γ :

$$P_D(t) = P_w(t) = \Phi_w\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \underline{u}^\gamma\right).$$

Como consecuencia se tiene que

$$P_D(t) = \sum_{\gamma \in \Gamma} t^{\langle w, \gamma \rangle} = \prod_{i=1}^d \frac{1}{1-t^{w_i}} \prod_{j=1}^g \frac{1-t^{\langle w, n_j \gamma_j \rangle}}{1-t^{\langle w, \gamma_j \rangle}}. \quad (3.6)$$

Demostración: Por la proposición anterior es claro que

$$\Phi_w\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \underline{u}^\gamma\right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} t^{\langle w, \gamma \rangle} = \sum_{k \geq 0} \sum_{\gamma: \langle w, \gamma \rangle = k} t^k = \sum_{k \geq 0} c_k t^k.$$

Para la segunda parte calcularemos explícitamente la serie característica del semigrupo Γ .

Por el Lema 2.1.2, sabemos que cualquier elemento $\gamma \in \Gamma$ puede ser escrito de manera única como sigue:

$$\gamma = \sum_{i=1}^d b_i \varepsilon_i + \sum_{j=1}^g a_j \gamma_j, \quad 0 \leq a_j < n_j, \quad b_i \geq 0,$$

donde $\varepsilon_i = (0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$ y γ_j son los generadores de Γ .

Por lo tanto tenemos la siguiente fórmula para P_Γ en términos de los generadores del semigrupo,

$$P_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \underline{u}^\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \underline{u}^{\sum_{i=1}^d \lambda_i \varepsilon_i + \sum_{j=1}^g \lambda_j \gamma_j} = \prod_{i=1}^d \frac{1}{1 - u_i} \prod_{j=1}^g \frac{1 - \underline{u}^{n_j \gamma_j}}{1 - \underline{u}^{\gamma_j}}. \quad (3.7)$$

Como consecuencia también tenemos una fórmula para $P_w(t)$,

$$P_w(t) = \sum_{\gamma \in \Gamma} t^{\langle w, \gamma \rangle} = \prod_{i=1}^d \frac{1}{1 - t^{w_i}} \prod_{j=1}^g \frac{1 - t^{\langle w, n_j \gamma_j \rangle}}{1 - t^{\langle w, \gamma_j \rangle}}. \quad (3.8)$$

□

Nota 3.1. Se define n_0 como el número natural que verifica $\gamma_{n_0, 2} = 0$ pero $\gamma_{n_0+1, 2} \neq 0$. Reescribimos la fórmula (3.8) de la serie de Poincaré en dos productos, el primero hasta el índice n_0 y el siguiente del índice n_0+1 hasta g , es decir,

$$P_w(t) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{n_0} (1 - t^{w_1 n_i \gamma_{i,1}})}{\prod_{i=1}^{n_0} (1 - t^{w_1 \gamma_{i,1}}) (1 - t^{w_1})} \right) \prod_{i=2}^d \left(\frac{1}{1 - t^{w_i}} \right) \prod_{i=n_0+1}^g \left(\frac{1 - t^{\langle w, n_i \gamma_i \rangle}}{1 - t^{\langle w, \gamma_i \rangle}} \right). \quad (3.9)$$

Obsérvese que el producto $\left(\frac{\prod_{i=1}^{n_0} (1 - t^{w_1 n_i \gamma_{i,1}})}{\prod_{i=1}^{n_0} (1 - t^{w_1 \gamma_{i,1}}) (1 - t^{w_1})} \right)$ es la serie de Poincaré $P(h)(t^{\frac{w_1}{\deg(h)}})$, donde h es la curva plana con semigrupo generado por: $\deg(h), \deg(h)\gamma_{1,1}, \dots, \deg(h)\gamma_{n_0,1}$. Esta observación será de gran utilidad en la Sección 3.6.

Se muestran a continuación una serie de ejemplos en los que diferentes singularidades tiene la misma serie de Poincaré, incluso cuando las valoraciones asociadas son distintas.

Ejemplos

- Consideramos dos singularidades casi-ordinarias con exponentes característicos $\lambda_1 = (3/2, 0), \lambda_2 = (5, 1/2)$ y $\lambda'_1 = (3/2, 0), \lambda'_2 = (4, 3/2)$ respectivamente. Los correspondientes generadores del semigrupo son $\gamma_1 = (3/2, 0), \gamma_2 = (13/2, 1/2)$ y $\gamma'_1 = (3/2, 0), \gamma'_2 = (11/2, 3/2)$ respectivamente. Para ambos el vector w es $(2, 2)$ y las series de Poincaré son,

$$P_w(t) = P'_w(t) = \left(\frac{1 - t^6}{1 - t^3} \right) \left(\frac{1 - t^{28}}{1 - t^{14}} \right) \left(\frac{1}{1 - t^2} \right) \left(\frac{1}{1 - t^2} \right).$$

• De hecho podemos encontrar dos hipersuperficies casi-ordinarias singulares con semigrupos diferentes (luego diferentes singularidades) Γ, Γ' y valoraciones diferentes w, w' pero con la misma serie de Poincaré, veamos dos ejemplos de esta situación .

- (1.) Sea f_1 con exponentes característicos $\lambda_1 = (\frac{5}{2}, 0, 0), \lambda_2 = (\frac{17}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}), \lambda_3 = (\frac{36}{2}, \frac{8}{4}, \frac{11}{10})$ y por lo tanto los generadores del semigrupo son $\gamma_1 = (\frac{5}{2}, 0, 0), \gamma_2 = (\frac{22}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}), \gamma_3 = (\frac{459}{2}, \frac{27}{4}, \frac{30}{10})$. Tomamos como valoración la dada por $w = (2, 4, 10)$. Su serie de Poincaré es:

$$P_w(t) = \left(\frac{1}{1-t^2}\right)\left(\frac{1}{1-t^4}\right)\left(\frac{1}{1-t^{10}}\right)\left(\frac{1-t^{10}}{1-t^5}\right)\left(\frac{1-t^{24 \cdot 20}}{1-t^{24}}\right)\left(\frac{1-t^{516 \cdot 2}}{1-t^{516}}\right).$$

Por otra parte consideramos f_2 cuyos exponentes característicos son $\lambda_1 = (\frac{5}{4}, 0, 0), \lambda_2 = (\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{20}), \lambda_3 = (\frac{20}{4}, \frac{4}{2}, \frac{21}{20})$ y generadores del semigrupo $\Rightarrow \gamma_1 = (\frac{5}{4}, 0, 0), \gamma_2 = (\frac{22}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{20}), \gamma_3 = (\frac{453}{4}, \frac{23}{2}, \frac{40}{20})$. Tomamos la valoración definida por $w = (4, 2, 20)$, que nos da como serie de Poincaré,

$$P'_w(t) = \left(\frac{1}{1-t^4}\right)\left(\frac{1}{1-t^2}\right)\left(\frac{1}{1-t^{20}}\right)\left(\frac{1-t^{20}}{1-t^5}\right)\left(\frac{1-t^{24 \cdot 20}}{1-t^{24}}\right)\left(\frac{1-t^{516 \cdot 2}}{1-t^{516}}\right).$$

- (2.) Otro ejemplo más sencillo todavía. Consideramos $f_1 : \lambda_1 = (1, \frac{1}{3}) \Rightarrow \gamma_1 = (1, \frac{1}{3})$ y valoración $w = (1, 3)$, y $f_2 : \lambda_1 = (2, \frac{1}{2}) \Rightarrow \gamma_1 = (2, \frac{1}{2})$ con valoración $w = (1, 2)$. En ambos casos la serie de Poincaré es,

$$P_w(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)\left(\frac{1}{1-t^3}\right)\left(\frac{1-t^6}{1-t^2}\right).$$

Nota 3.2. El semigrupo de una hipersuperficie irreducible casi-ordinaria singular es equivalente al tipo topológico de la singularidad (Teorema 5.3 en [52]). Por lo tanto, estos ejemplos nos dicen que la serie de Poincaré así definida no determina el semigrupo en general y por tanto no determina el tipo topológico de la singularidad.

Nos proponemos a continuación extender los resultados anteriores al caso en que consideramos todas las valoraciones divisoriales (o equivalentemente todas las componentes irreducibles del divisor excepcional) de la modificación tórica $\pi_{\rho'} : (Z_{\rho', N_g}, E) \rightarrow (Z_{\rho, N_g}, o_{\rho})$ definida por el refinamiento ρ' de ρ .

Sean D^1, \dots, D^r todas las componentes irreducibles del divisor excepcional E (no hay diferencias en el caso en que tomemos un subconjunto de ellas) y los correspondientes elementos primitivos $W = (w^1, \dots, w^r)$

en el retículo N_g . Denotaremos por $\nu_i = \nu_{w^i}$ las valoraciones divisoriales asociadas y $\nu_W = (\nu_{w^1}, \dots, \nu_{w^r}) = (\nu_1, \dots, \nu_r)$, de manera que $\nu_W(h) := (\nu_1(h), \dots, \nu_r(h)) \in \mathbb{Z}^r$. También denotaremos por $\underline{1}$ el elemento $(1, \dots, 1)$.

De forma análoga al caso de una sola valoración, si $\Lambda \subset \frac{1}{n}\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{Q}^d$ es un subsemigrupo aditivo finitamente generado, definimos $\Phi_W : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^r$, como $\Phi_W(\gamma) = (\langle w^1, \gamma \rangle, \dots, \langle w^r, \gamma \rangle)$. También usaremos la misma notación para el homomorfismo de anillos $\Phi_W : \mathbb{Z}[[\Lambda]] \subset \mathbb{Z}[[\underline{u}^{1/n}]] \rightarrow \mathbb{Z}[[\underline{t}^{1/n}]]$ definido por $\Phi_W(\underline{u}^\gamma) = \underline{t}^{\Phi_W(\gamma)} = t_1^{\langle w^1, \gamma \rangle} \dots t_r^{\langle w^r, \gamma \rangle}$ para cada monomio $\underline{u}^\gamma = u_1^{\gamma_1} \dots u_d^{\gamma_d}$.

Para cada $\underline{a} = (a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ consideramos $J(\underline{a}) = \{h \in R \mid \nu_W(h) \geq \underline{a}\}$ y $c(\underline{a}) = \dim_{\mathbb{C}} J(\underline{a}) / J(\underline{a} + \underline{1})$. Recordemos que $\nu_W(h) \geq \underline{a}$ expresa que $\nu_1(h) \geq a_1, \dots, \nu_r(h) \geq a_r$. Definimos

$$L_W(t_1, \dots, t_r) = \sum_{\underline{a} \in \mathbb{Z}^r} c(\underline{a}) \underline{t}^{\underline{a}}.$$

Recordemos que $L_W(\underline{t})$ es un elemento del conjunto $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]]$ de series formales de Laurent (ver [24]). Los elementos de \mathcal{L} son expresiones formales de la forma $\sum_{u \in \mathbb{Z}^r} k_u \underline{t}^u$, en general, “infinitas en todas las direcciones”.

El conjunto \mathcal{L} no es un anillo, pero tiene estructura de módulo sobre el anillo $\mathbb{Z}[[t_1, \dots, t_r]]$ o sobre el anillo de polinomios de Laurent $\mathbb{Z}[t_1^{\pm 1}, \dots, t_r^{\pm 1}]$.

Definición 3.2.4. *La serie de Poincaré asociada a la modificación tórica π_ρ es:*

$$P_W(t_1, \dots, t_r) = \frac{(t_1 - 1) \cdots (t_r - 1)}{t_1 \cdots t_r - 1} L_W(t_1, \dots, t_r).$$

En lo que sigue veremos que la definición anterior tiene sentido, es decir, que realmente $P_W(t_1, \dots, t_r)$ es una serie y la calcularemos en función del semigrupo Γ de la singularidad $(S, 0)$.

Fijamos un índice $i \in I := \{1, \dots, r\}$ y consecuentemente una de las valoraciones divisoriales ν_i . Sea $D_i(\underline{a}) = J(\underline{a}) / J(\underline{a} + \varepsilon_i)$ y $d_i(\underline{a}) = \dim_{\mathbb{C}} D_i(\underline{a})$ su dimensión. Sea $p_i(\underline{a}) = \sum_{j \in J \subset I} (-1)^{\#J} d_i(\underline{a} + \varepsilon_j)$, donde ε_j es una r -upla en $\mathbb{Z}_{\geq 0}^r$, cuya i -ésima componente es igual a 1 (resp. 0) si $i \in J$ (resp. si $i \notin J$).

Sea

$$(t_1 - 1) \cdots (t_r - 1) L_W(t_1, \dots, t_r) = \sum_{\underline{a} \in \mathbb{Z}^r} l(\underline{a}) \underline{t}^{\underline{a}}.$$

Lema 3.2.5. *Sea $\underline{a} \in \mathbb{Z}^r$. Se tiene que $l(\underline{a}) = p_1(\underline{a} - \underline{1}) - p_1(\underline{a})$.*

Demostración: Sea $\underline{a} \in \mathbb{Z}^r$, calculando el valor de $l(\underline{a})$ obtenemos que

$$l(\underline{a}) = \sum_{J \subset I} (-1)^{\#J} c(\underline{a} - \underline{1} + \varepsilon_J) = \sum_{1 \notin J \subset I} (-1)^{\#J} [c(\underline{a} - \underline{1} + \varepsilon_J) - c(\underline{a} - \underline{1} + \varepsilon_J + \varepsilon_1)].$$

Para todo $\underline{n} \in \mathbb{Z}^r$ y toda reordenación (i_1, \dots, i_r) de elementos de I tenemos la siguiente descomposición de espacios vectoriales:

$$J(\underline{n})/J(\underline{n} + \underline{1}) \cong \bigoplus_{j=1}^r D_{i_j}(\underline{n} + \varepsilon_{i_1} + \dots + \varepsilon_{i_j}),$$

por tanto $c(\underline{n}) = \sum_{j=1}^r d_{i_j}(\underline{n} + \varepsilon_{i_1} + \dots + \varepsilon_{i_j})$. Si usamos la descomposición anterior para $\underline{n} = \underline{a} - \underline{1} + \varepsilon_J$ con la reordenación $(1, \dots, r)$ y para $\underline{n} = \underline{a} - \underline{1} + \varepsilon_J + \varepsilon_1$ con la reordenación $(2, \dots, r, 1)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} l(\underline{a}) &= \sum_{1 \notin J \subset I} (-1)^{\#J} [c(\underline{a} - \underline{1} + \varepsilon_J) - c(\underline{a} - \underline{1} + \varepsilon_J + \varepsilon_1)] = \\ &= \sum_{1 \notin J \subset I} (-1)^{\#J} [d_1(\underline{a} - \underline{1} + \varepsilon_J) - d_1(\underline{a} + \varepsilon_J)] = p_1(\underline{a} - \underline{1}) - p_1(\underline{a}). \square \end{aligned}$$

Si $h = \sum c_u X^u \in R$, sabemos que $\nu_i(h) = \min_{c_u \neq 0} \langle w^i, u \rangle$. Si $k = \nu_i(h)$ denotaremos por $LM_i(h)$ la forma inicial de h respecto de ν_i , es decir, $LM_i(h) = \sum_{\langle w^i, u \rangle = k} c_u X^u$.

Lema 3.2.6. *Para cada $i \in I$ y $\underline{a} \in \mathbb{Z}^r$ se tiene que*

$$p_i(\underline{a}) = \#\{\gamma \in \Gamma \mid \Phi_W(\gamma) = \underline{a}\}.$$

En particular $p_i(\underline{a})$ no depende del índice i .

Demostración: Fijemos $i = 1$ por simplicidad. Dado un elemento $f \in J(\underline{a})$, la condición $f \notin J(\underline{a} + \varepsilon_1)$ equivale a decir que $\nu_1(f) = a_1$. Por otro lado, si tenemos $f, g \in J(\underline{a}) \setminus J(\underline{a} + \varepsilon_1)$ sus clases son linealmente independientes en $J(\underline{a})/J(\underline{a} + \varepsilon_1)$ si y sólo si sus formas iniciales con respecto a ν_i no son proporcionales, es decir, $LM_1(f) \neq \lambda LM_1(g)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Es claro que si el monomio $c_\gamma X^\gamma$ aparece en la forma inicial $LM_1(f)$ entonces $\gamma \in \Gamma$, ya que γ está en el polígono de Newton de f , $\mathcal{N}(f)$, y sabemos que el semigrupo Γ de $(S, 0)$ coincide con los vértices que aparecen en los polígonos de Newton de elementos del anillo local R . Así pues la dimensión $d_1(\underline{a})$ del espacio vectorial cociente $J(\underline{a})/J(\underline{a} + \varepsilon_1)$ es

$$d_1(\underline{a}) = \#\{\gamma \in \Gamma \mid \Phi_W(\gamma) \geq \underline{a}; \langle w^1, \gamma \rangle = a_1\}.$$

Ahora, usando las fórmulas de inclusión exclusión, obtenemos que

$$p_1(\underline{a}) = \sum_{1 \notin J \subset I} (-1)^{\#J} d_1(\underline{a} + \varepsilon_J) = \#\{\gamma \in \Gamma \mid \Phi_W(\gamma) = \underline{a}\}.$$

□

Nótese que, como consecuencia de los lemas anteriores $P_W(t_1, \dots, t_r)$ es en efecto una serie de potencias con coeficientes enteros.

Teorema 3.2.7. *Sea $(S, 0)$ una singularidad casi-ordinaria con semigrupo Γ y $P_W(t_1, \dots, t_r)$ su serie de Poincaré relativa a W . Entonces*

$$P_W(t_1, \dots, t_r) = \Phi_W(P_\Gamma).$$

Demostración: Sea $\Gamma' = \Phi_W(\Gamma) \subset \mathbb{Z}^r$. En primer lugar, observemos que

$$\Phi_W(P_\Gamma) = \Phi_W\left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \underline{u}^\gamma\right) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \underline{t}^{\Phi_W(\gamma)} = \sum_{\underline{a} \in \Gamma'} \left(\sum_{\Phi(\gamma)=\underline{a}} \underline{t}^{\underline{a}} \right) = \sum_{\underline{a} \in \Gamma'} p_1(\underline{a}) \underline{t}^{\underline{a}}.$$

Por lo tanto tendremos que

$$\begin{aligned} (t_1 - 1) \cdots (t_r - 1) L_W(t_1, \dots, t_r) &= \\ &= \sum p_1(\underline{a} - 1) \underline{t}^{\underline{a}} - \sum p_1(\underline{a}) \underline{t}^{\underline{a}} = \underline{t} \Phi_W(P_\Gamma) - \Phi_W(P_\Gamma) \end{aligned}$$

y como consecuencia $P_W(t_1, \dots, t_r) = \Phi_W(P_\Gamma)$. □

Nota 3.3. En general la aplicación lineal Φ_W no es inyectiva y por lo tanto los semigrupos Γ y Γ' no son isomorfos. Sin embargo, si existen vectores primitivos $w^1, \dots, w^d \in N_g$ de manera que $\Phi_W : \mathbb{Q}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ es un isomorfismo lineal (en particular induce una biyección entre los semigrupos Γ y Γ') la serie $P_W(t_1, \dots, t_d)$ coincide con la serie característica de Γ' y permite recuperar la serie característica P_Γ . En particular, la serie de Poincaré es un invariante completo de la singularidad casi-ordinaria.

Tal y como hemos visto hasta ahora, es posible definir una serie de Poincaré relativa a cualquier conjunto de divisores W que aparecen tras sucesivas explosiones normalizadas en el origen de la normalización $(\bar{S}, 0)$ de $(S, 0)$. Los divisores esenciales de la singularidad proporcionan un conjunto intrínseco de divisores (es decir de valoraciones discretas monomiales) que permite dar una definición de serie de Poincaré independiente de la modificación tórica considerada.

Definición 3.2.8. *Sea X una variedad y $\varphi_i : X_i \rightarrow X$ $i = 1, 2$ dos morfismos birracionales y propios de variedad normales X_i . Sea $E \subset X_1$ un divisor excepcional irreducible de φ_1 . La aplicación birracional $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : X_1 \dashrightarrow X_2$ está definida en un abierto denso no vacío $E_0 \subset E$, la clausura de $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1(E_0)$ está bien definida y se llama **centro** de E en X_2 .*

Decimos que E aparece en φ_2 o en X_2 , si el centro de E en X_2 es también un divisor. Cuando esto ocurre la aplicación birracional $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : X_1 \dashrightarrow X_2$ es un isomorfismo local en el punto genérico de E , abusando de notación denotaremos el transformado birracional de E en X_2 también por E . Más aun para nuestros intereses podemos identificar $E \subset X_1$ con $E \subset X_2$, de hecho dicha relación es de equivalencia y cada clase de equivalencia corresponde con una valoración divisorial en el cuerpo de fracciones de X y se le llama divisor excepcional sobre X .

Definición 3.2.9. *Sea X una variedad sobre \mathbb{C} . Por una **resolución de singularidades** de X entendemos un morfismo birracional y propio $\varphi : Y \rightarrow X$, con Y no singular y verificando que $Y \setminus \varphi^{-1}(\text{Sing}X) \rightarrow X \setminus \text{Sing}X$ es un isomorfismo. Por $\text{Sing}X$ denotamos el lugar singular de X .*

Definición 3.2.10. *Un divisor excepcional E sobre X se dice que es un **divisor esencial** sobre X (resp. esencial sobre $x \in X$) si para toda resolución $\varphi : Y \rightarrow X$ el centro de E en Y es una componente irreducible de $\varphi^{-1}(\text{Sing}X)$ (resp. es una componente irreducible de $\varphi^{-1}(x)$).*

Luego están definidos de manera unívoca, por esta razón es el conjunto de valoraciones más natural. Además, Bouvier en [8] describe el conjunto de divisores esenciales de una variedad tórica singular que es exactamente nuestro caso cuando tomamos la normalización.

Definición 3.2.11. *Entendemos por **serie de Poincaré** a la serie $P_W(S, 0)$ donde W es el conjunto de divisores esenciales.*

La Serie de Poincaré de una Superficie

El objetivo de esta sección es estudiar si en el caso de superficies casi-ordinarias singulares la serie de Poincaré determina o no el tipo topológico de la singularidad.

Si calculamos el análogo a la expresión (3.9) de la serie de Poincaré para todas las valoraciones esenciales centradas en el origen, uno puede apreciar que ciertos exponentes son $\langle W, \gamma_j \rangle = \alpha_j$, donde $W = (w_1, \dots, w_r)$ son todas las valoraciones esenciales centradas en el origen. Tal y como veremos más adelante, en la Sección 3.5, nosotros somos capaces de reconocer α_j en la serie de Poincaré, luego si existen al menos dos valoraciones esenciales definidas por w_1, w_2 linealmente independientes entonces podemos plantear un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (con una submatriz de $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ de rango dos) que tiene solución única. De esta manera recuperaríamos el semigrupo y

lograríamos nuestro objetivo. Por lo tanto, el problema se reduce a ver cuando existen dos valoraciones esenciales linealmente independientes centradas en el origen.

Sea ρ el cono generado por la base canónica de \mathbb{Z}^d , M_g el retículo $\mathbb{Z}^d + \langle \lambda_1, \dots, \lambda_g \rangle_{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$ y $N_g = M_g^\vee$. Bouvier en [8] describe los divisores esenciales como los asociados a las componentes irreducibles de $U := N_g \cap \overset{\circ}{\sigma}$, donde $\overset{\circ}{\sigma}$ es el interior topológico de σ .

También es conocido (ver Capítulo VI de [70]) que la normalización de una singularidad casi-ordinaria es o bien una superficie lisa o bien una singularidad de Hirzebruch-Jung, es decir, se puede escribir como la normalización de la superficie $Z^n = XY^p$ con $\text{mcd}(p, n) = 1$ y $1 \leq p < n$.

Sea $[b_0, b_1, \dots, b_s]$ la expresión en fracciones continuas de Hirzebruch-Jung de $\frac{n}{n-p}$, dando lugar a $s + 1$ componentes irreducibles D_0, \dots, D_s del divisor excepcional de la resolución minimal de la singularidad. Cada divisor se corresponde con un vector de $\overset{\circ}{\rho} \cap N_g$, que forman parte de la envolvente convexa de $(\rho - \{0\}) \cap N_g$. Por lo tanto, hay un único divisor excepcional en la resolución minimal si y solo si,

$$s = 0 \Leftrightarrow n - p | n \Leftrightarrow n - p = 1. \quad (3.10)$$

Por ejemplo, la normalización de $Z^5 = XY^4$ es una superficie de Hirzebruch-Jung de tipo (5, 4).

Concluimos que es condición suficiente para que la serie de Poincaré asociada al conjunto de divisores esenciales de la normalización determine el tipo topológico de la singularidad que $n \neq p + 1$.

3.3. El Anillo Graduado

En la sección anterior definimos la serie de Poincaré asociada a un conjunto cualesquiera de divisores provenientes de explosiones centradas en el origen. El propósito de esta sección es definir, formalizar y calcular la serie de Poincaré cuando se permiten valoraciones divisoriales no necesariamente centradas en el origen, por ejemplo provenientes de explotar un ideal primo.

Manteniendo la notación de la sección anterior, consideramos la serie de Poincaré $P_D(t) = \sum c_k t^k$ con ν_D una valoración divisorial no centrada en el origen. El problema en este caso es que $c_k = \infty$ para todo k . Por lo tanto se trata de dar una definición más general que englobe este caso y que nos permita calcular de forma efectiva dicha serie.

Sean ν_1, \dots, ν_r un conjunto de valoraciones divisoriales de las cuales al menos una de ella está centrada en el origen. Suponemos sin pérdida de generalidad que esta es ν_1 . La existencia de una valoración centrada en el origen es fundamental ya que esto permitirá que las dimensiones sean finitas. De igual manera que hacíamos en la sección anterior, asociamos a ν_i un vector $w_i \in \rho \cap N_g$.

La valoración ν_1 produce una filtración de ideales de R como sigue, $I(a) = \{h \in R \mid \nu_1(h) \geq a\}$ y $J(a) = \frac{I(a)}{I(a+1)}$.

Por la Proposición 3.2.2 tenemos el isomorfismo de graduados,

$$gr_{\nu_1} R = \bigoplus_{a \geq 0} J(a) \stackrel{\psi}{\simeq} \mathbb{C}[\Gamma]^{w_1} = \bigoplus_{a \geq 0} H_a = \bigoplus_{a \geq 0} (\bigoplus_{\langle w_1, u \rangle = a} \mathbb{C} X^u). \quad (3.11)$$

Vamos a dar un refinamiento de la graduación $gr_{\nu_1} R$ por ν_2 . Pero primero vamos a mostrar que ν_2, \dots, ν_r inducen valoraciones ν_2^1, \dots, ν_r^1 en $gr_{\nu_1} R$.

Definición 3.3.1. Sea $h \in R$ que descomponen en suma de componentes homogéneas en $gr_{\nu_1} R$ como $h = \sum_a \bar{h}_a$, con $0 \neq \bar{h}_a \in J(a)$. Para cada $i = 2, \dots, r$ se define el valor de un elemento h como $\nu_i^1(h) = \min_a \{\nu_i^1(\bar{h}_a)\}$ el valor en la componente homogénea mas pequeña. Asimismo,

$$\nu_i^1(\bar{h}_a) = \max\{\nu_i(h_a) \mid \bar{h}_a = h_a + I(a+1)\}.$$

Proposición 3.3.2. ν_2^1, \dots, ν_r^1 son valoraciones en $gr_{\nu_1} R$.

Demostración: Basta con verlo para una de ellas, fijemos $i = 2$. En primer lugar está bien definida ya que no depende del representante de la clase que se tome. Además, el máximo siempre se alcanza debido a que si escribimos $h = h_a + h'$ con $h' \in I(a+1)$ entonces:

- Si $\nu_2(h') > \nu_2(h_a) \rightarrow \nu_2(h) = \nu_2(h_a)$.
- Si $\nu_2(h_a) > \nu_2(h') \rightarrow \nu_2(h) = \nu_2(h')$.
- Si $\nu_2(h_a) = \nu_2(h') \rightarrow \nu_2(h) = \nu_2(h')$.

Esto es consecuencia de que ν_2 es una valoración monomial, es decir, estamos utilizando la estructura tórica. Más aún, podemos suponer que el máximo de la clase \bar{h}_a se alcanza en h_a tal que $\psi(h_a) \in H(a)$.

Veamos que verifica las propiedades de ser valoración, para ello es suficiente con verlo para componentes homogéneas. Sean $\bar{h}_{a_1} \in J(a_1)$ y $\bar{h}_{a_2} \in J(a_2)$ con representantes $\bar{h}_{a_1} = h_{a_1} + I(a_1+1)$ y $\bar{h}_{a_2} = h_{a_2} + I(a_2+1)$ respectivamente.

- (i) $\nu_2^1(\bar{h}_{a_1} \cdot \bar{h}_{a_2}) = \nu_2(h_{a_1} \cdot h_{a_2}) = \nu_2(h_{a_1}) + \nu_2(h_{a_2})$.
- (ii) Si $a_1 = a_2$, $\nu_2^1(\bar{h}_{a_1} + \bar{h}_{a_2}) = \nu_2(h_{a_1} + h_{a_2}) \geq \min\{\nu_2(h_{a_1}), \nu_2(h_{a_2})\}$.
 Si $a_1 \neq a_2$, $\nu_2^1(\bar{h}_{a_1} + \bar{h}_{a_2}) = \nu_2(h_{\min\{a_1, a_2\}}) = \min\{\nu_2(h_{a_1}), \nu_2(h_{a_2})\}$. \square

A continuación fijamos $a_1 \geq 0$ y consideramos la filtración por ideales que define ν_2^1 en $J(a_1)$ de la siguiente manera, para cada $a_2 \geq 0$ consideramos $I(a_1, a_2) = \{h \in J(a_1) \mid \nu_2^1(h) \geq a_2\}$ y $J(a_1, a_2) = \frac{I(a_1, a_2)}{I(a_1, a_2+1)}$, produciendo un anillo graduado,

$$\mathcal{A}^2 = gr_{\nu_2^1}(gr_{\nu_1}R) = \bigoplus_{a_2 \geq 0} \bigoplus_{a_1 \geq 0} J(a_1, a_2).$$

Nota 3.4. Que \mathcal{A}^2 es un anillo graduado es consecuencia directa de que ν_2^1 es una valoración sobre $gr_{\nu_1}R$.

Proposición 3.3.3. *Se tiene el isomorfismo de anillos graduados*

$$\mathcal{A}^2 \stackrel{\psi_2}{\cong} \mathbb{C}[\Gamma]^{w_1, w_2} = \bigoplus_{a_1, a_2 \geq 0} \left(\bigoplus_{\substack{\langle w_1, u \rangle = a_1 \\ \langle w_2, u \rangle = a_2}} \mathbb{C}X^u \right). \quad (3.12)$$

Demostración: Es claro ya que hay un isomorfismo entre cada componente homogénea,

$$J(a_1, a_2) \stackrel{\psi_2}{\cong} \bigoplus_{\substack{\langle w_1, u \rangle = a_1 \\ \langle w_2, u \rangle = a_2}} \mathbb{C}X^u,$$

de nuevo gracias a la Proposición 3.2.2. \square

Podemos repetir este proceso para el resto de valoraciones obteniendo una nueva álgebra graduada en cada paso. Supongamos que para $1 \leq k < r$ hemos construido el álgebra graduada,

$$\mathcal{A}^k = gr_{\nu_k^{k-1}} gr_{\nu_{k-1}^{k-2}} \cdots gr_{\nu_1} R = \bigoplus_{a_k \geq 0} \bigoplus_{a_{k-1} \geq 0} \cdots \bigoplus_{a_1 \geq 0} J(a_1, a_2, \dots, a_k).$$

Donde,

$$I(a_1, a_2, \dots, a_k) = \{h \in J(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}) \mid \nu_k^{k-1}(h) \geq a_k\}$$

y

$$J(a_1, a_2, \dots, a_k) = \frac{I(a_1, a_2, \dots, a_k)}{I(a_1, a_2, \dots, a_k + 1)}.$$

Además $\nu_{k+1}^{k-1}, \dots, \nu_r^{k-1}$ se extienden de manera natural a valoraciones $\nu_{k+1}^k, \dots, \nu_r^k$ en \mathcal{A}^k de la siguiente manera. Sea $\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^k$, para cada componente homogénea $\bar{h}_{\underline{a}} = h_{\underline{a}} + I(a_1, a_2, \dots, a_k + 1)$ se define para $s = k + 1, \dots, r$

$$\nu_s^k(\bar{h}_{\underline{a}}) := \max\{\nu_s^{k-1}(h_{\underline{a}}) \mid \bar{h}_{\underline{a}} = h_{\underline{a}} + I(a_1, a_2, \dots, a_k + 1)\},$$

si consideramos un elemento no homogéneo $\phi = \sum_{\underline{a}} \bar{h}_{\underline{a}}$, se define su valor como $\nu_s^k(\bar{h}_{\underline{a}}) = \min_{\underline{a}}\{\bar{h}_{\underline{a}}\}$.

Igual que en la Proposición 3.3.2 se puede probar lo siguiente.

Proposición 3.3.4. *Para todo $s = k + 1, \dots, r$, ν_s^k es una valoración sobre \mathcal{A}^k .*

Como consecuencia ν_{k+1}^k define una filtración en \mathcal{A}^k y por tanto un álgebra graduada $\mathcal{A}^{k+1} = gr_{\nu_{k+1}^k} gr_{\nu_k^{k-1}} \cdots gr_{\nu_1} R$.

Proposición 3.3.5. *Se tiene el isomorfismo de anillos graduados*

$$\mathcal{A}^{k+1} \stackrel{\psi_{k+1}}{\cong} \mathbb{C}[\Gamma]^{w_1, \dots, w_{k+1}} = \bigoplus_{a_1, \dots, a_{k+1} \geq 0} \left(\bigoplus_{\substack{\langle w_1, u \rangle = a_1 \\ \vdots \\ \langle w_{k+1}, u \rangle = a_{k+1}}} \mathbb{C}X^u \right). \quad (3.13)$$

Demostración: Una vez más existe un isomorfismo entre cada componente homogénea,

$$J(a_1, \dots, a_{k+1}) \stackrel{k+1}{\cong} \bigoplus_{\substack{\langle w_1, u \rangle = a_1 \\ \vdots \\ \langle w_{k+1}, u \rangle = a_{k+1}}} \mathbb{C}X^u,$$

gracias a la Proposición 3.2.2. \square

Tras repetir este proceso r -veces finalmente obtenemos un álgebra graduada $\mathcal{A}^r = gr_{\nu_r^{r-1}} gr_{\nu_{r-1}^{r-2}} \cdots gr_{\nu_1} R$ y un isomorfismo de anillos graduados $\mathcal{A}^r \stackrel{\psi_r}{\cong} \mathbb{C}[\Gamma]^{w_1, \dots, w_r}$. Si entre las valoraciones ν_1, \dots, ν_r existe al menos una centrada en el origen, podemos garantizar que $\dim J(a_1, \dots, a_r) < \infty$, denotamos por $c_{a_1, \dots, a_r} = \dim J(a_1, \dots, a_r)$.

Como consecuencia del isomorfismo ψ_r obtenemos la dimensión de las componentes homogéneas.

Proposición 3.3.6. $c_{a_1, \dots, a_r} = \dim H(a_1, \dots, a_r) = \{u \in \Gamma \mid \langle w_j, u \rangle = a_j, j = 1, \dots, r\}$.

Definición 3.3.7. Se define la **serie de Poincaré** asociada a los divisores ν_1, \dots, ν_r como,

$$P_{\nu_1, \dots, \nu_r}(\underline{t}) = \sum_{(a_1, \dots, a_r) \in \mathbb{Z}^r} c_{a_1, \dots, a_r} \underline{t}^{a_1, \dots, a_r}.$$

Aunque por la Proposición 3.3.6 sabemos que $c_{a_1, \dots, a_r} > 0$ si $(a_1, \dots, a_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r$ y por tanto,

$$P_{\nu_1, \dots, \nu_r}(\underline{t}) = \sum_{(a_1, \dots, a_r) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^r} c_{a_1, \dots, a_r} \underline{t}^{a_1, \dots, a_r},$$

entendiendo por $\underline{t}^{a_1, \dots, a_r} = t_1^{a_1} \dots t_r^{a_r}$.

Sea $\tau(1, \dots, r) = (\tau(1), \dots, \tau(r))$ una permutación de r elementos. Denotamos por $J^\tau(a_1, \dots, a_r) = J(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(r)})$ y por $\mathcal{A}_\tau^r = \bigoplus_{a_{\tau(r)} \geq 0} \dots \bigoplus_{a_{\tau(1)} \geq 0} J(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(r)})$.

Lema 3.3.8. $\mathcal{A}_\tau^r \simeq \mathcal{A}^r$ como anillos graduados.

Demostración: Es claro ya que es cierto para cada componente homogénea $J(a_1, \dots, a_r) \simeq J(a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(r)})$. \square

Nota 3.5. Como consecuencia se tiene que, $c_{a_1, \dots, a_r}^\tau = c_{a_{\tau(1)}, \dots, a_{\tau(r)}} = c_{a_1, \dots, a_r}$. Si denotamos por $P_{\nu_1, \dots, \nu_r}^\tau(t_1, \dots, t_r) = P_{\nu_{\tau(1)}, \dots, \nu_{\tau(r)}}(t_{\tau(1)}, \dots, t_{\tau(1)})$, es claro que $P_{\nu_1, \dots, \nu_r}^\tau(\underline{t})$ no necesariamente es igual a $P_{\nu_1, \dots, \nu_r}(\underline{t})$ ya que las variables cambian y los coeficientes no, entonces tenemos que la serie de Poincaré asociada de la singularidad $(S, 0)$ y a las valoraciones (ν_1, \dots, ν_r) es única salvo permutación de las valorizaciones.

Por un lado, consideramos la serie característica (o de Poincaré) del semigrupo que denotamos por $P_\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \underline{X}^\gamma$ y que se escribe como:

$$P_\Gamma = \prod_{j=1}^d \frac{1}{(1 - \underline{X}^{e_j})} \prod_{i=g}^g \left(\frac{1 - \underline{X}^{n_i \gamma_i}}{1 - \underline{X}^{\gamma_i}} \right) \in \mathbb{C}[[\Gamma]].$$

Por otra parte, consideramos $W = (w_1, \dots, w_r)$ el conjunto de vectores que definen las valoraciones elegidas. También se considera la aplicación Φ que se define como sigue.

Definición 3.3.9. Definimos el homomorfismo de anillos $\Phi_{\underline{W}}$ como:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}[[\Gamma]] &\rightarrow \mathbb{C}[[t_1, \dots, t_r]] \\ g = \sum c_u \underline{X}^u &\rightarrow \Phi_{\underline{W}}(g) = \sum c_u t_1^{\langle w_1, u \rangle} \dots t_r^{\langle w_r, u \rangle} \end{aligned}$$

Por último obtenemos el siguiente resultado que nos permite calcular la serie de Poincaré.

Teorema 3.3.10. $\Phi_{\underline{W}}(P_{\Gamma}) = P_{\nu_1, \dots, \nu_r}(\underline{t})$.

Demostración: Es consecuencia de a Proposición 3.3.6. \square

Ahora se trata de recuperar Γ a partir de $\Phi_{\underline{W}}(P_{\Gamma})$, para ello es necesario estudiar como es la serie de Poincaré. Pero como la definición depende del conjunto de divisores elegidos queremos dar primero un conjunto de divisores intrínsecos a la singularidad y que son "suficientes" para nuestros objetivos, estos son los divisores esenciales.

3.4. Divisores Esenciales

Como la serie de Poincaré depende de las valoraciones divisoriales elegidas vamos a dar un conjunto de valoraciones que son totalmente intrínsecas a la singularidad y que nos permitirán calcular de manera efectiva el semi-grupo a partir de la serie de Poincaré. Dicho conjunto de valoraciones son las esenciales, que se introdujo en la Definición 3.2.10.

En el caso tórico normal C. Bouvier (ver [8]) da una descripción combinatoria de los divisores esenciales. Por otra parte, Ishii-Kollar lo hacen para el caso tórico no necesariamente normal (ver [66]).

Recordamos brevemente los resultados. Sea Z_{σ} una variedad tórica afín definida por un cono racional estrictamente convexo $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$. Supongamos que Z_{σ} no es lisa, entonces es conocido que el lugar singular de Z_{σ} consiste en la unión de órbitas correspondientes a caras no regulares τ de σ . Denotamos por \leq_{σ} el orden parcial definido en N como sigue:

$$v \leq_{\sigma} v' \Leftrightarrow v' \in v + \sigma.$$

Proposición 3.4.1. (ver [8] y [66])

1. Los divisores esenciales de la variedad tórica Z_{σ} son los divisores correspondientes a los elementos minimales con respecto al orden \leq_{σ} en el

conjunto,

$$D_\sigma := \bigcup_{\tau \text{ non regular}}^{\tau < \sigma} \overset{\circ}{\tau} \cap N.$$

2. Los divisores esenciales sobre o_σ son los divisores correspondientes a los elementos minimales con respecto a \leq_σ en el conjunto $\overset{\circ}{\sigma} \cap N$.

Supongamos ahora que tenemos la variedad tórica afín $(Z^\Lambda, 0)$ con Λ un semigrupo. Entonces los divisores esenciales de $(Z^\Lambda, 0)$ sobre el 0 coinciden con los divisores esenciales de su normalización $Z^\Lambda = Z_\sigma$. La clave para determinar los divisores esenciales sobre el lugar singular es que la preimagen del lugar singular de $(Z^\Lambda, 0)$ por la normalización es una unión de órbitas. Algunas de dichas órbitas están contenidas en el lugar singular de la normalización $Z_{\sigma, N}$, mientras que otras órbitas están formadas por puntos no singulares. Si τ es una cara regular de σ , denotamos por v_τ la suma de los vectores primitivos de $N \cap \tau$. El siguiente resultado, debido a Ishii, describe con precisión cuales son exactamente los divisores esenciales.

Proposición 3.4.2. (ver [64])

Sea,

$$D' := \{v_\tau \mid \tau \text{ cara regular y } \text{orb}(\tau) \subset n^{-1}(\text{sing}(Z^\Lambda))\}.$$

Los divisores esenciales de Z^Λ sobre el lugar singular se corresponden con los elementos minimales para el orden \leq_σ en el conjunto $D_\sigma \cup D'$.

Volviendo sobre el caso de una hipersuperficie $(S, 0)$ casi-ordinaria, Ishii prueba en [63] que los divisores esenciales de $(S, 0)$ sobre el origen coinciden con los de su normalización $(\bar{S}, 0)$ sobre el origen. Para los divisores esenciales sobre el lugar singular de $(S, 0)$, P. González Pérez prueba en [54] el siguiente resultado.

Proposición 3.4.3. (ver [54])

La Proposición 3.4.2 es cierta cuando reemplazamos Z^Λ por $(S, 0)$.

Para entender mejor estos últimos resultados necesitamos conocer el lugar singular. Lipman caracteriza el lugar singular en el Teorema 7.3 de [76].

Consideramos como hasta ahora, $f = 0$, la ecuación de la singularidad $(S, 0)$, con $f \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_d]][Y]$. Sea $I \subset \{1, \dots, d\}$ un subconjunto de índices, denotamos por $Z_I := S \cap \{X_i = 0\}_{i \in I}$. Siguiendo las notaciones dadas hasta el momento recordar que los exponentes característicos son $\lambda_i = (\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,d})$ para $i = 1, \dots, g$.

Teorema 3.4.4. (Lipman [76])

El lugar singular $Sing(S)$ de la hipersuperficie casi-ordinaria $(S, 0)$ tiene componentes irreducibles de codimensión uno o dos de la forma Z_i o $Z_{i,j}$ para $1 \leq i, j \leq c$.

■ **codim 1**

Z_j es una componente del lugar singular si y solo si no se dan las siguientes situaciones,

- $\lambda_{1,j} = 0, \dots, \lambda_{g-1,j} = 0$ y $\lambda_{g,j} = 0$, es decir $j > c$.
- $\lambda_{1,j} = 0, \dots, \lambda_{g-1,j} = 0$ y $\lambda_{g,j} = \frac{1}{n_g}$, esto ocurre cuando $j < c$.

De aquí se deduce que existen $1 \leq s \leq c$ componentes irreducibles, digamos Z_1, \dots, Z_s , en el lugar singular.

■ **codim 2**

Las componentes $Z_{j,l}$ tal que $j, l \in \{s+1, \dots, c\}$ y $j \neq l$ son componentes del lugar singular. Además no existen más.

Ejemplo 3.1. Supongamos que f tiene por raíz $\zeta = X_1^{3/2} + X_1^{7/4} X_2^{1/2} X_3^{1/2}$. Entonces $Sing(S, 0) = Z_1 \cup Z_{1,2}$.

Asociada a cada componente del lugar singular tomamos todas las valoraciones esenciales asociadas, que vienen descritas en el siguiente lema, pero primero hagamos alguna observación. Consideramos $(\bar{S}, 0) \xrightarrow{n} (S, 0)$ la normalización, $\rho^\vee = \text{pos}\{e_1, \dots, e_d\}$ el cono de $M_{\mathbb{R}}$ generado por una base canónica de M y $\rho = \text{pos}\{u_1, \dots, u_d\}$ su base dual, es decir, $u_i = e_i^\vee$.

Nota 3.6. Podemos identificar N_0 con \mathbb{Z}^d tomando coordenadas con respecto a la base dual de $\{e_i\}_{i=1}^d$. A través de esta identificación los vectores de $\rho \cap N_g \subset N_0$ son aquellos vectores $v \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d$ tal que $\langle v, \gamma_j \rangle \in \mathbb{Z}$ para $j = 1, \dots, g$. Denotamos por $u_i \in \rho$ el vector primitivo del retículo N_g que es ortogonal a $e_1, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_d$. Darse cuenta que u_i es un vector de enteros que es múltiplo del i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{Z}^d , para $i = 1, \dots, d$. En particular, si $c < d$ entonces u_{c+1}, \dots, u_d son los vectores de la base canónica de \mathbb{Z}^d .

Lema 3.4.5. (ver [54]) La preimagen del lugar singular por la normalización es la unión de clausuras de órbitas de codimensión uno o dos.

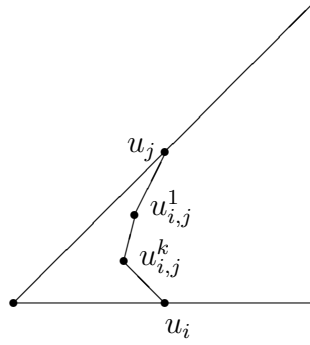
1. La clausura de órbitas de codimensión uno se corresponden con lados de ρ de la forma $u_i \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $x_i = 0$ define una componente del lugar

singular de $(S, 0)$, es decir, $n^{-1}(Z_i) = \overline{O}_{\tau_i}$, donde $\tau_i = \text{pos}\{u_i\}$ es la cara de ρ generada por u_i .

Los divisores esenciales sobre componentes de codimensión uno de $(S, 0)$ se corresponden con vectores del retículo u_1, \dots, u_{s_1} .

2. La clausura de órbitas de codimensión dos se corresponden con caras de ρ de la forma $\tau_{i,j} := \text{pos}\{u_i, u_j\}$ tal que $x_i = 0, x_j = 0$ definen una componente irreducible del lugar singular de $(S, 0)$.

Hay $n_g - 1$ divisores esenciales sobre cada componente de codimensión dos de $\text{Sing}S$, donde n_g queda caracterizado en la Proposición 1.1.11.



- Si $n_g > 2$ cada par de vectores de $\tau_{i,j}^\circ \cap N_g$ definen valoraciones esenciales linealmente independientes.
- Si $n_g = 2$ entonces la única valoración esencial definida sobre la componente correspondiente a $\tau_{i,j}$ está definida por el vector $u_i + u_j/2$.

Demostración: El apartado 1 se deduce del Teorema 3.4.4 junto con la descripción de los divisores esenciales de la Proposición 3.4.3.

Para el apartado 2 consideramos el siguiente isomorfismo

$$(\tau_{i,j}, N_g \cap \tau_{i,j}) \rightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}^2, \{(v_1, v_2) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2 \mid v_1 + v_2 = 0 \text{ mod } n_g\})$$

que se deduce de la Nota 3.6 por el siguiente argumento: si $v = (v_1, \dots, v_d) \in N_g \cap \tau_{i,j}$, con $\tau_{i,j}$ una cara de ρ correspondiente a una componente de dimensión dos, entonces tenemos que $\langle v, \gamma_k \rangle = 0$ para $k = 1, \dots, n_g - 1$ y $\langle v, \gamma_g \rangle = \frac{1}{n_g}(v_i + v_j)$, ya que por el Teorema 3.4.4 las coordenadas i, j de γ_g son iguales a $1/n_g$.

Se sigue por tanto de esto y de la Proposición 3.4.3 que hay exactamente $n_g - 1$ vectores minimales en el conjunto $\tau_{i,j}^\circ \cap N_g$ con respecto al orden \leq_ρ , y si $n_g > 2$ cualquier pareja de vectores son linealmente independientes. Si $n_g = 2$ entonces existe un solo vector minimal v tal que $v = v_i = v_j$ y $v_k = 0$ si $k \neq i, j$ y por tanto se sigue que $v = \frac{v_i + v_j}{2}$. Darse cuenta que en el caso casi-ordinario el cono $\tau_{i,j}$, que se corresponde con una componente de codimensión dos del lugar singular de S , nunca es regular para el retículo N_g . \square

Definición 3.4.6. Denotamos por

$$\underline{w} = (w_1, \dots, w_p) \quad (3.14)$$

la sucesión de vectores de enteros en $\rho \cap N_g$ correspondientes a las valoraciones esenciales de $(S, 0)$.

Si $d > 2$, ordenamos (3.14) de tal manera que los primeros s_1 vectores se corresponden con valoraciones esenciales centradas en componentes de codimensión uno del lugar singular $Sing(S)$, los siguientes s_2 vectores se corresponden con las valoraciones esenciales centradas en componentes de codimensión dos del lugar singular $Sing(S)$, y los $s_0 \geq 1$ restantes se corresponden con las valoraciones esenciales centradas en el origen. Luego $p = s_0 + s_1 + s_2$.

Si $d = 2$, denotamos por $p = s_0 + s_1$ el número total de valoraciones esenciales, si además $s_1 = 0$ y la singularidad es aislada entonces las valoraciones esenciales sobre el lugar singular y las valoraciones esenciales sobre el origen coinciden.

Nota 3.7. Como consecuencia del Teorema 3.4.4 y el Lema 3.4.5 tenemos:

1. El número s_1 es exactamente el número de componentes de codimensión uno de $Sing(S)$, mientras que s_2 es mayor o igual que el número $\binom{c-s_1}{2}$ de componentes de codimensión de $Sing(S)$.
2. Se tiene que $s_2 = 1$ si y solo si $c - s_1 = n_g = 2$. Además si $s_2 = 1$ se verifica que,

$$\langle w_{s_1+1}, e_{c-1} \rangle = \langle w_{s_1+1}, e_c \rangle = \langle w_{s_1+1}, \lambda_g \rangle = 1.$$

Denotamos por $\langle \underline{w}, e_j \rangle$ al vector $(\langle w_1, e_j \rangle, \dots, \langle w_p, e_j \rangle)$.

Definición 3.4.7. La matriz,

$$\mathcal{M}_f^{\underline{w}} = (\langle w_i, e_j \rangle)_{i=1, \dots, p}^{j=1, \dots, d}$$

esta formada por enteros no negativos y la llamamos **Matriz esencial** asociada al polinomio casi-ordinario f .

Nota 3.8. La aplicación lineal $\varphi_{\underline{w}} : M_{\mathbb{Q}} \rightarrow \mathbb{Z}^p$, que manda

$$e_j \rightarrow \langle \underline{w}, e_j \rangle := (\langle w_1, e_j \rangle, \dots, \langle w_p, e_j \rangle), \text{ para } j = 1, \dots, d$$

tiene como matriz asociada en las correspondientes bases canónicas a $\mathcal{M}_{\underline{f}}^{\underline{w}}$.

El siguiente resultado técnico implica que la matriz $\mathcal{M}_{\underline{f}}^{\underline{w}}$ tiene la siguiente estructura de bloques:

| | | | |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|
| | s_1 | $c - s_1$ | $d - c$ |
| s_1 | D | $\underline{0}$ | $\underline{0}$ |
| s_2 | $\underline{0}$ | B | $\underline{0}$ |
| s_0 | $*$ | $*$ | $\underline{1}$ |

donde la primera fila y la primera columna indican el tamaño de los bloques. La submatriz D es diagonal de rango máximo s_1 , la submatriz B es genéricamente de rango máximo $c - s_1$. Por $*$ entendemos una submatriz de entradas no nulas y por $\underline{1}, \underline{0}$ submatrices con todas las entradas iguales a uno y cero respectivamente. El siguiente resultado demuestra con precisión esto.

Lema 3.4.8. *Si $d > 2$ la matriz $\mathcal{M}_{\underline{f}}^{\underline{w}}$ verifica las siguientes propiedades:*

1. *La submatriz $D := (\langle w_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq s_1}$ es diagonal con determinante no nulo.*
2. *Las submatrices $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{1 \leq j \leq s_1 \\ s_1+1 \leq i \leq s_1+s_2}}$, $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{c \leq j \leq d \\ s_1+1 \leq i \leq s_1+s_2}}$ y $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{s_1 \leq j \leq d \\ 1 \leq i \leq s_1}}$ se anulan.*
3. *La submatriz $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{c+1 \leq j \leq d \\ s_1+s_2 \leq i \leq p}}$ tiene todas las entradas iguales a 1.*
4. *Si $c - s_1 \geq 2$ entonces la submatriz $B := (\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{s_1+1 \leq j \leq c \\ s_1+1 \leq i \leq s_1+s_2}}$ tiene rango $c - s_1$ si $s_1 \neq 1$.*
5. *La submatriz $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{1 \leq j \leq c \\ 1 \leq i \leq p}}$ tiene rango c si $s_2 \neq 1$.*

Demostración: Por el Lema 3.4.5 sabemos que $w_1 = u_1, \dots, w_{s_1} = u_{s_1}$. Luego el primer resultado se deduce de esto ya que por definición,

$$\langle u_i, e_j \rangle = 0 \Leftrightarrow i \neq j, \text{ para } 1 \leq i, j \leq d.$$

También por el Lema 3.4.5 sabemos que si $s_1 + 1 \leq i \leq s_1 + s_2$ entonces existen $s_1 < j_1 < j_2 < c$ tal que $w_i \in \text{pos}(u_{j_1}, u_{j_2})$. Por lo que el segundo resultado se deduce de que:

$$\langle w_i, e_j \rangle = 0 \Leftrightarrow j \neq j_1, j_2, \text{ para } 1 \leq j \leq d. \quad (3.15)$$

Para 3, darse cuenta que si $c < d$ los vectores u_{c+1}, \dots, u_d son parte de una base canónica de $\mathbb{Z}^d \subset N_g$ por la Nota 3.6. El semigrupo $\rho \cap N_g$ descompone de la siguiente forma, $(\rho' \cap N'_g) \times \bigoplus_{k=c+1}^d \mathbb{Z}u_k$, donde ρ' (resp. N'_g) es la intersección de el como ρ (resp. N_g) con el subespacio generado por $\{u_1, \dots, u_c\}$. Esto significa que los vectores w correspondientes a divisores esenciales de ρ son de la forma $w = w' + u_{c+1} + \dots + u_d$, donde w' se corresponde con el vector que define una valoración esencial en ρ' .

Para 4, tenemos que si $s_2 \geq 2 = c - s_1$ los vectores w_{s_1+1}, w_{s_1+2} vistos como formas en M_g , tienen restricciones al subretículo generado por $\{e_{c-1}, e_c\}$ linealmente independientes. Por otra parte, si $c - s_1 > 2$ entonces el número s_2 es mayor o igual al número de componentes de codimensión dos de $Sing(S)$, el cual es $\geq c - s_1$. Se sigue el resultado por (3.15).

Para 5, es suficiente ver que el resultado es cierto cuando $c - s_1 = 1$, luego $s_2 = 0$. Las formas w_1, \dots, w_c restringidas al subespacio generado por e_1, \dots, e_c son linealmente independientes por 1, puesto que $w_c \in \overset{\circ}{\rho}$ tiene valor distinto de cero en e_c , mientras que w_1, \dots, w_{c-1} se anulan en e_c . \square

3.5. La Serie de Poincaré y el Semigrupo

Sea $(S, 0)$ una singularidad irreducible de hipersuperficie casi-ordinaria definida por un polinomio casi-ordinario f con raíces normalizadas y cuya normalización viene dada por la variedad tórica $(\bar{S}, 0) = (Z_{\rho, N_g}, o_\rho)$.

Puesto que la serie de Poincaré depende del conjunto $v_1, \dots, v_r \in N_g$ de valoraciones elegidas, definimos a continuación un invariante analítico.

Definición 3.5.1. Denotamos por $\underline{w} = (w_1, \dots, w_p)$ el conjunto de vectores de $\rho \cap N_g$ correspondientes a los divisores esenciales de $(S, 0)$. Definimos la serie de Poincaré como la asociada a los divisores esenciales $P_{(S,0)} = P_{(S,0)}^{\underline{w}} \in \mathbb{Z}[[t]]$.

A partir de ahora cuando hablemos de serie de Poincaré nos referiremos a la asociada a \underline{w} .

Sabemos por el Teorema 3.3.10 que $\Phi_{\underline{w}}(P_\Gamma) = P_{\nu_1, \dots, \nu_r}(\underline{t})$. Que se escribe como,

$$\Phi_{\underline{w}}(P_\Gamma) = \frac{1}{1 - \underline{t}^{\langle \underline{W}, \epsilon_1 \rangle}} \cdots \frac{1}{1 - \underline{t}^{\langle \underline{W}, \epsilon_d \rangle}} \cdot \frac{1 - \underline{t}^{\langle \underline{W}, n_1 \gamma_1 \rangle}}{1 - \underline{t}^{\langle \underline{W}, \gamma_1 \rangle}} \cdots \frac{1 - \underline{t}^{\langle \underline{W}, n_g \gamma_g \rangle}}{1 - \underline{t}^{\langle \underline{W}, \gamma_g \rangle}}. \quad (3.16)$$

El objetivo en esta sección es dar un algoritmo que recupere el semigrupo a partir de la serie de Poincaré, teniendo en cuenta las propiedades del semigrupo de la Proposición 2.1.2, sabemos que,

$$\langle \underline{w}, \gamma_1 \rangle < n_1 \langle \underline{w}, \gamma_1 \rangle < \langle \underline{w}, \gamma_2 \rangle < \dots \quad (3.17)$$

Para ello necesitamos recuperar además de los generadores $\gamma_1, \dots, \gamma_g$, la dimensión d y el tipo dimensional c .

Definición 3.5.2. Se define el **tipo dimensional** de una singularidad $(S, 0)$ dada por $f = 0$ como el número de variables que X_1, \dots, X_c que aparecen en el discriminante $\Delta_Y(f) = (X_1^{r_1} \dots X_c^{r_c})H$, $H(0) \neq 0$.

Nota 3.9. Las variables que intervienen $\underline{t} = (t_1, \dots, t_p)$ en la Definición 3.5.1 las podemos agrupar como sigue: si $d > 2$ entonces t_1, \dots, t_{s_1} (resp. $t_{s_1+1}, \dots, t_{s_2}$) se corresponden con las valoraciones esenciales sobre componentes de codimensión uno (resp. codim dos) del lugar singular $Sing(S)$, mientras que $t_{s_1+s_2+1}, \dots, t_p$ se corresponde con las valoraciones centradas en el origen. Si $d = 2$, solo consideramos dos grupos como en la Nota 3.7.

La serie de Poincaré de $(S, 0)$ es un invariante analítico salvo permutación de las variables t_1, \dots, t_p respetando los grupos de variables introducidos en la Nota 3.9.

Ejemplo 3.2. Consideramos el cono cuadrático dado por $Y^2 - X_1X_2 = 0 \in \mathbb{C}^{d+1}$, para $d \geq 2$.

1. Si $d = 2$, solo existe una valoración esencial sobre el lugar singular que coincide con la centrada en el origen, que viene dada por $v_1 = (1, 1)$. La serie de Poincaré depende solo de la variable $t = t_1$ y es:

$$P_{(S,0)} = (1 - t^2)(1 - t)^{-3}.$$

2. Si $d > 2$, hay dos valoraciones esenciales, una sobre el lugar singular y dada por $v_1 = (1, 1, 0, \dots, 0)$ y otra sobre el origen dada por $v_2 = (1, \dots, 1)$. Luego la serie de Poincaré es,

$$P_{(S,0)} = (1 - t_1^2 t_2^2)(1 - t_1 t_2)^{-3}(1 - t_2)^{-d+2}.$$

Analizamos los términos que aparecen en la serie de Poincaré según la fórmula (3.16), para una proyección casi-ordinaria normalizada y las variables $\underline{t} = (t_1, \dots, t_p)$ ordenadas como en la Nota 3.9.

Lema 3.5.3. *Supongamos que $d > 2$. Si la fórmula (3.16) proviene de una proyección casi-ordinaria normalizada de una hipersuperficie casi-ordinaria irreducible de dimensión > 2 , entonces no hay cancelación entre los términos ciclotómicos del numerador y denominador. Además, si denotamos por c el tipo dimensional de $(S, 0)$ entonces se tiene:*

1. *La dimensión d de $(S, 0)$ es el número de factores ciclotómicos que aparecen en el denominador menos el número de factores ciclotómicos que aparecen en el numerador en la expresión (3.16), contados con multiplicidades.*
2. *El número g de exponentes característicos es el número de factores ciclotómicos del numerador.*
3. *Si $s_2 = 0$ el término $(1 - t_{s_1+s_2+1} \cdots t_p)$ aparece en el denominador de (3.16) con multiplicidad igual a*

$$\begin{cases} d - c & \text{si } c = d \text{ o } \langle \underline{w}, e_c \rangle \neq \langle \underline{w}, e_d \rangle, \\ d - c + 1 & \text{si } c \neq d \text{ y } \langle \underline{w}, e_c \rangle = \langle \underline{w}, e_d \rangle. \end{cases}$$

4. *Si $s_2 = 1$ el término $(1 - t_{s_1+s_2+1} \cdots t_p)$ aparece en el denominador de (3.16) con multiplicidad igual $d - c$ y el término $(1 - t_{s_1+1} \cdots t_p)$ aparece con multiplicidad igual a*

$$\begin{cases} 3 & \text{si } g = 1 \text{ y } \gamma_1 = (1/2, 1/2, 0, \dots, 0), \\ 2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

5. *Si $s_2 \geq 2$ entonces el término $(1 - t_{s_1+s_2+1} \cdots t_p)$ aparece en el denominador de (3.16) con multiplicidad igual $d - c$.*

En todos los casos los términos ciclotómicos que no hemos mencionado aparecen sin multiplicidades.

Demostración: La primera afirmación es trivial. De las propiedades de los generadores del semigrupo (ver Proposición 2.1.2) se deduce que,

$$\gamma_1 < n_1\gamma_1 < \gamma_2 < n_2\gamma_2 < \cdots < \gamma_g < n_g\gamma_g,$$

y puesto que $w_{s_1+s_2+1} \in \overset{\circ}{\rho}$ se deduce que

$$\langle \underline{w}, \gamma_1 \rangle < \langle \underline{w}, n_1\gamma_1 \rangle < \cdots < \langle \underline{w}, \gamma_g \rangle < \langle \underline{w}, n_g\gamma_g \rangle, \quad (3.18)$$

donde $<$ significa \neq y \leq se refiere a la comparación coordinada a coordinada. Un rayo de la forma $\mathbb{R}_{\geq 0}\gamma_j$ puede contener del conjunto $\{e_1, \dots, e_d\}$, a lo sumo

al vector e_1 , si este es el caso, y puesto que la proyección casi-ordinaria esta normalizada, tenemos que $e_1 < \lambda_1 = \gamma_1$ y por tanto

$$\langle \underline{w}, e_1 \rangle < \langle \underline{w}, \gamma_1 \rangle. \quad (3.19)$$

Una cancelación entre términos del numerador y denominador de (3.16) implica la existencia de $1 \leq j \leq g$ y de $1 \leq i \leq d$ tal que

$$\langle \underline{w}, n_j \gamma_j \rangle < \langle \underline{w}, e_i \rangle. \quad (3.20)$$

Por definición γ_j es un elemento del \mathbb{Q} -espacio vectorial generado por e_1, \dots, e_c . Por el apartado 3 de la Proposición 3.4.8 sabemos que si existe un tal índice i este ha de ser $\leq c$, ya que una potencia positiva de t_k para $1 \leq k \leq s_1 + s_2$ divide a $t^{\langle \underline{w}, \gamma_j \rangle}$. Distinguimos dos casos:

- Si $s_2 \neq 1$ no es posible la cancelación entre términos del numerador y denominador de (3.16) ya que la matriz $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{1 \leq j \leq c \\ 1 \leq i \leq p}}$ tiene rango máximo según la Proposición 3.4.8.
- Si $s_2 = 1$ y además $1 \leq j < g$ y $1 \leq i < c - 1$ la fórmula (3.20) no puede darse, ya que la única posibilidad es que $e_i = e_1$ pero entonces las fórmulas (3.18) y (3.19) dan una contradicción. Por el apartado 2 de la Nota 3.7 sabemos que $n_g = 2$ y

$$\underline{t}^{\langle \underline{w}, e_{c-1} \rangle} = \underline{t}^{\underline{w}, e_c} = t_{s_1+1} \cdots t_p.$$

Es claro que este término es distinto de $\underline{t}^{\langle \underline{w}, n_j \gamma_j \rangle}$ para $j = 1, \dots, g-1$. Por otra parte el exponente de t_{s_1+1} en $\underline{t}^{\langle \underline{w}, 2\gamma_g \rangle}$ es igual a dos por el apartado 2 de la Nota 3.7. Luego tampoco es posible que haya cancelación en este caso. El Ejemplo 3.2 es un caso particular de esta situación.

Ahora la afirmación 2 es evidente. La afirmación 3 es consecuencia del apartado 3 del Lema 3.4.8, teniendo en cuenta que si $d > c$ entonces los vectores columna $\langle \underline{w}, e_c \rangle, \langle \underline{w}, e_d \rangle$ de \mathcal{M}_f^w pueden coincidir. La afirmación 5 se prueba igual. La primera parte de la afirmación 4 es consecuencia de los apartados 3 y 4 del Lema 3.4.8, mientras que la segunda parte es consecuencia de la Nota 3.7 y un sencillo calculo.

Finalmente, no pueden aparecer otros factores ciclotómicos con multiplicidad > 1 ya que el apartado 5 del Lema 3.4.8 implica que los vectores columna $\langle \underline{w}, e_j \rangle_{j=1, \dots, c}$ son linealmente independientes y determinan $\langle \underline{w}, \lambda_i \rangle$ por linealidad sobre \mathbb{Q} (ver Nota 3.8). \square

El siguiente es el resultado más importante de este capítulo.

Teorema 3.5.4. *La serie de Poincaré de un germen de hipersuperficie casi-ordinaria irreducible $(S, 0)$ con respecto a las valoraciones esenciales \underline{w} determina, y queda determinada, por la sucesión de exponentes característicos de $(S, 0)$ normalizada.*

Demostración: Después de posibles simplificaciones sabemos por el Lema 3.5.3 que la serie de Poincaré se escribe de manera única como,

$$P_{(S,0)} = \frac{(1 - \underline{t}^{\beta_1}) \cdots (1 - \underline{t}^{\beta_g})}{(1 - \underline{t}^{\alpha_1}) \cdots (1 - \underline{t}^{\alpha_{d+g}})},$$

donde d es la dimensión de $(S, 0)$ y g es el número de exponentes característicos normalizados. Por (3.18) podemos suponer que tenemos reordenados los índices tal que $\beta_1 < \cdots < \beta_g$. Puede suceder que el rayo $\beta_1 \mathbb{R}_{\geq 0}$ contenga o bien varios de los α_i o como mucho uno. Denotamos en el primer caso por α_1 al menor de ellos (coordenada a coordenada) y por α_{d+1} el siguiente con esta propiedad. En el segundo caso denotamos por α_{d+1} el único exponente con esta propiedad. Por el Lema 3.5.3 sabemos que $n_1 \alpha_{d+1} = \beta_1$ con $n_1 > 1$. Repetimos este proceso reordenando los α 's, β 's si es necesario de manera que $n_i \alpha_{d+i} = \beta_i$ para $i = 1, \dots, g$. Darse cuenta que los enteros n_1, \dots, n_g son los enteros característicos asociados a los exponentes característicos normalizados de $(S, 0)$.

Supongamos en primer lugar que $d > 2$. La serie de Poincaré distingue las s_2 variables correspondientes a los divisores esenciales sobre componentes de codimensión dos del lugar singular de $(S, 0)$ (ver Nota 3.9).

- Si $s_2 \geq 2$ tenemos por el Lema 3.5.3 que el término $1 - t_{s_1+s_2+1} \cdots t_p$ aparece en el denominador de $P_{(S,0)}$ con multiplicidad $d - c$. Esto determina c . Además, por la Nota 3.7 el caso $c - s_1 = n_g = 2$ no puede darse. Renombramos por tanto los exponentes $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ de manera que

$$\alpha_{d-c+1} = \cdots = \alpha_d = (\overbrace{0, \dots, 0}^c, 1, \dots, 1). \quad (3.21)$$

La matriz \mathcal{M} , cuyas columnas son los vectores $\alpha_1, \dots, \alpha_c$, es $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{1 \leq j \leq c \\ 1 \leq i \leq p}}$ salvo permutación de las columnas (por el Lema 3.5.3). Por el apartado 5 del Lema 3.4.8 la matriz \mathcal{M} tiene rango máximo igual a c . La aplicación lineal $\mathcal{M}\lambda = \alpha_{d+j}$ tiene una única solución, que nos da exactamente las primeras c coordenadas de γ_j , salvo quizás una reordenación de las mismas, para $j = 1, \dots, g$. Luego recuperamos $\gamma_1, \dots, \gamma_g$, que son un sistema minimal de generadores del semigrupo, añadiendo a las soluciones anteriores $d - c$ ceros para así tener un vector con d coordenadas y después reordenarlo si es

necesario de manera que se verifique (1.5). Finalmente, por la fórmula (2.1) recuperamos los exponentes característicos normalizados.

- Si $s_2 = 0$, por el Lema 3.5.3 el término $1 - t_{s_1+1} \cdots t_p$ aparece en el denominador de $P_{(S,0)}$ con multiplicidad $d - c'$ donde $c' \in \{c - 1, c\}$. Reordenamos los exponentes $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ de manera que aquellos correspondientes al monomio $t_{s_1+1} \cdots t_p$ aparecen con mayor índice como hacíamos en (3.21). Por el Lema 3.5.3 la matriz \mathcal{M} , cuyas columnas son los vectores $\alpha_1, \dots, \alpha_{c'}$ es igual a $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{1 \leq j \leq c' \\ 1 \leq i \leq p}}$, salvo permutación de las columnas. Por el apartado 5 del Lema 3.4.8 la matriz \mathcal{M} tiene rango máximo igual a c' .

Para poder calcular c estudiamos el sistema lineal de ecuaciones $\mathcal{M}\lambda = \alpha_{d+g}$. Si el sistema no tiene solución única entonces $c = c' + 1$ y sustituimos \mathcal{M} por otra matriz, que denotaremos con la misma letra para no introducir más notación y que tiene por columnas los vectores $\alpha_1, \dots, \alpha_{c'+1}$. Luego sabemos que esta nueva matriz es igual a $\alpha_1, \dots, \alpha_{c'}$ es igual a $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{1 \leq j \leq c'+1 \\ 1 \leq i \leq p}}$, salvo permutación de las columnas y tiene rango $c = c' + 1$ por el apartado 5 del Lema 3.4.8. En ambos casos el sistema lineal $\mathcal{M}\lambda = \alpha_{d+j}$ tiene solución única para $j = 1, \dots, g$. Razonando como en el caso anterior recuperamos los exponentes característicos normalizados.

- Si $s_2 = 1$, por el Lema 3.5.3 el término $1 - t_{s_1+2} \cdots t_p$ aparece en el denominador de $P_{(S,0)}$ con multiplicidad $d - c$ y que el término $1 - t_{s_1+1} \cdots t_p$ aparece con multiplicidad 2 ó 3. Reordenamos los exponentes $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ de manera que aquellos correspondientes al monomio $t_{s_1+2} \cdots t_p$ aparecen con mayor índice como hacíamos en (3.21), seguidos de aquellos exponentes correspondientes al monomio $t_{s_1+1} \cdots t_p$. Recordar que (por la Nota 3.9) somos capaces de distinguir estos monomios en la serie de Poincaré. Denotamos por ξ' la s_1 -upla de \mathbb{Q}^p que se obtiene manteniendo tan solo las primeras s_1 coordenadas. Por el Lema 3.5.3 la matriz \mathcal{M} , cuyas columnas son los vectores $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{s_1}$, es igual a $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{1 \leq j \leq s_1 \\ 1 \leq i \leq s_1}}$ salvo permutación de las columnas. Por el apartado 1 del Lema 3.4.8 la matriz \mathcal{M} tiene rango máximo igual a s_1 . El sistema lineal $\mathcal{M}\lambda = \alpha'_{d+j}$ tiene solución única para $j = 1, \dots, g - 1$, que nos da las primeras $c - 2 = s_1$ coordenadas de γ'_j , salvo permutación, para $j = 1, \dots, g - 1$. Para construir los γ_j rellenamos los γ'_j hasta tener d coordenadas, para $j = 1, \dots, g - 1$. Para $j = g$ añadimos dos coordenadas con valor $1/2$ y rellenamos con ceros hasta tener d coordenadas (por el Teorema 3.4.4 y la Nota 3.7). La prueba concluye como en el caso $s_2 \geq 2$.

Supongamos ahora que $d = 2$. Si la singularidad es normal entonces es aislada, luego se tiene que $s_1 = 0, c = 2$ y las valoraciones esenciales sobre el lugar singular coinciden con las valoraciones esenciales sobre el origen. En este caso la singularidad es isomorfa a $Y^n - X_1X_2$ por [76]. Es una singularidad de

tipo A_{n-1} , luego tiene $n - 1$ divisores excepcionales en la resolución minimal, todos ellos esenciales correspondientes a vectores de un retículo de enteros y que son dos a dos linealmente independientes si $n > 2$ (ver [43]). Si $n = 2$ tenemos un solo divisor esencial en la resolución minimal (ver Ejemplo 3.2).

Si la singularidad no es normal entonces el lugar singular de S tiene una o dos componentes irreducibles. Si existen dos componentes irreducibles, la afirmación es consecuencia del Lema 3.4.5, los correspondientes vectores $w_1 = u_1$ y $w_2 = u_2$ son claramente linealmente independientes. En otro caso tenemos solo una componente, que se corresponde con el vector $w_1 = u_1$, entonces tenemos que el vector $w_p \in \overset{\circ}{\rho}$ es linealmente independiente con w_1 . En cualquiera de los casos, con excepción del cono cuadrático $Y^2 - X_1X_2$, la matriz \mathcal{M} con columnas α_1, α_2 es igual, salvo permutación de columnas, a $(\langle w_i, e_j \rangle)_{\substack{1 \leq j \leq 2 \\ 1 \leq i \leq p}}$. Puesto que esta matriz es no singular recuperamos los vectores $\gamma_1, \dots, \gamma_g$, salvo permutación de las coordenadas, resolviendo el sistema lineal $\mathcal{M}\gamma = \alpha_{2+j}$ para $j = 1, \dots, g$. Por tanto concluimos como en los casos anteriores. \square

Darse cuenta que el desarrollo anterior es totalmente algorítmico una vez que tenemos la forma reducida de la serie de Poincaré y que se hace uso únicamente de álgebra lineal.

Sea $(S, 0) \subset (\mathbb{C}^{d+1}, 0)$ un germen de hipersuperficie casi-ordinaria irreducible definido por un polinomio casi-ordinario normalizado $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$. Denotamos por $(S', 0)$ el germen d' -dimensional obtenido a partir de S intersectando con $X_{c+1} = \dots = X_d = 0$. El siguiente corolario es por tanto inmediato:

Corolario 3.5.5. *El germen $(S, 0)$ es una deformación equisingular de una singularidad casi-ordinaria $(S', 0)$ de dimensión $1 \leq d' \leq d$, si y solo si*

$$P_{(S,0)}(t_1, \dots, t_p) = \left(\frac{1}{1 - t_{s_1+s_2+1} \cdots t_p} \right)^{d-d'} P_{(S',0)}(t_1, \dots, t_p),$$

donde las variables t_1, \dots, t_p se distribuyen en grupos, tal y como indicamos en la Nota 3.9, de la misma manera para $(S, 0)$ que para $(S', 0)$.

Darse cuenta que el menor valor posible para d' en el Corolario 3.5.5 es igual a c , el tipo dimensional de $(S, 0)$.

3.6. La Serie de Poincaré y la Función Zeta

En esta sección comparamos la Función Zeta de la monodromía de una hipersuperficie irreducible casi-ordinaria singular dada por f , con la correspon-

diente serie de Poincaré, asociadas a las valoraciones esenciales, para $d \geq 2$. La Función Zeta fue estudiada por McEwan y Némethi en [79] y los mismos autores junto con P.González Pérez en caso reducible (ver [51]).

Suponemos que $f \in \mathbb{C}[[X_1, \dots, X_d]][Y]$ es un polinomio irreducible casi-ordinario, con exponentes característicos $\lambda_j = (\lambda_{j,1}, \dots, \lambda_{j,d}) \in \mathbb{Q}^d$, para $j = 1, \dots, g$.

Teorema 3.6.1. (*Theorem A. McEwan, Némethi [79]*)

Supongamos que $f : (\mathbb{C}^{d+1}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ ($d \geq 2$) es una hipersuperficie irreducible casi-ordinaria singular representada en un sistema de coordenadas locales (\underline{x}, y) , como ya describimos en la Sección 1.1. Entonces la Función Zeta geométrica de la monodromía de f es :

$$\zeta(f)(t) = \zeta(f|_{x_2=\dots=x_d=0})(t).$$

Además puede suceder:

- (A) $\lambda_1 = (\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,d})$ con $\lambda_{1,2} \neq 0$.

$$\zeta(f)(t) = (1 - t)^n,$$

con $n = \text{deg}_y(f)$.

- (B) Si $\lambda_{1,2} = 0$, existe $i_0 \geq 1$ tal que $\lambda_{i_0,2} = 0$ pero $\lambda_{i_0+1,2} \neq 0$. Entonces

$$f|_{x_2=\dots=x_d=0} = (h(x_1, y))^{\frac{n}{\text{deg}(g)}}.$$

Donde h es una curva plana con desarrollo de Puiseux $y = \sum_{i=1}^{i_0} x_1^{\lambda_{i,1}}$.
Por lo tanto

$$\zeta(f)(t) = \zeta(h)^{\frac{n}{\text{deg}(h)}}(t) = \zeta(h)(t^{\frac{n}{\text{deg}(h)}}).$$

Para poder comparar $\zeta(f)(t)$ con $P_{(S,0)}^w(\underline{t})$ especializamos todas las variables en t . Una primera observación es que, $P_{(S,0)}^w(t, \dots, t) = P_{(S,0)}^w(t)$ con $w = w_1 + \dots + w_r$, es decir, es la serie de Poincaré asociada a una sola valoración centrada en el origen. Para simplificar la notación vamos a denotar por $w = (b_1, \dots, b_d)$. Entonces,

$$P_{(S,0)}^w(t) = \left(\frac{\prod_{i=1}^{i_0} (1 - t^{b_1 n_i \gamma_{i,1}})}{\prod_{i=1}^{i_0} (1 - t^{b_1 \gamma_{i,1}})(1 - t^{b_1})} \right) \prod_{i=i_0+1}^g \left(\frac{1 - t^{\langle w, n_i \gamma_i \rangle}}{1 - t^{\langle w, \gamma_i \rangle}} \right) \cdot \prod_{i=2}^d \left(\frac{1}{1 - t^{b_i}} \right)$$

obtenemos que

- (A) $\lambda_{1,2} \neq 0$,

$$P_{(S,0)}^w(t) = \frac{1}{\zeta(f)(t^{\frac{b_1}{n}})} \left(\frac{\prod_{i=1}^{i_0} (1 - t^{b_1 n_i \gamma_{i,1}})}{\prod_{i=1}^{i_0} (1 - t^{b_1 \gamma_{i,1}})} \right) \prod_{i=i_0+1}^g \left(\frac{1 - t^{\langle w, n_j \gamma_j \rangle}}{1 - t^{\langle w, \gamma_j \rangle}} \right) \prod_{i=2}^d \left(\frac{1}{1 - t^{b_i}} \right)$$

- (B) $\lambda_{1,2} = 0$,

$$P_{(S,0)}^w(t) = \zeta(h)(t^{\frac{b_1}{\deg(h)}}) \prod_{i=i_0+1}^g \left(\frac{1 - t^{\langle w, n_j \gamma_j \rangle}}{1 - t^{\langle w, \gamma_j \rangle}} \right) \prod_{i=2}^d \left(\frac{1}{1 - t^{b_i}} \right). \quad (3.22)$$

Nota 3.10. Esto significa que si $i_0 \neq g$ la serie de Poincaré tiene más información que la Función Zeta.

3.7. Ejemplo

Sea $(S, 0)$ la singularidad casi-ordinaria irreducible de $(\mathbb{C}^4, 0)$ con exponentes característicos $\lambda_1 = (\frac{1}{3}, 0, 0)$ y $\lambda_2 = (\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, 0)$. Entonces los generadores del semigrupo son $\gamma_1 = (\frac{1}{3}, 0, 0)$ y $\gamma_2 = (\frac{11}{9}, \frac{1}{9}, 0)$ con $n_1 = 3, n_2 = 9$.

Consideramos $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $M = \mathbb{Z}^3 + \gamma_1 \mathbb{Z} + \gamma_2 \mathbb{Z}$ y $\{u_1, u_2, u_3\}$ su base dual que es base de $N = M^\vee$. El poliedro de Newton de $(M \setminus \{0\}) \cap \rho$ tiene una sola cara, la cual induce la valoración $\nu_2 = 3u_1 + 3u_2 + u_3$. Por otra parte, el lugar singular induce la valoración $\nu_1 = 9u_1$. Calculamos la tabla de valores:

| | |
|----------------------------------------|---------------------------------------|
| $\langle \nu_1, e_1 \rangle = 9$ | $\langle \nu_2, e_1 \rangle = 3$ |
| $\langle \nu_1, e_2 \rangle = 0$ | $\langle \nu_2, e_2 \rangle = 3$ |
| $\langle \nu_1, e_3 \rangle = 0$ | $\langle \nu_2, e_3 \rangle = 1$ |
| $\langle \nu_1, \gamma_1 \rangle = 3$ | $\langle \nu_2, \gamma_1 \rangle = 1$ |
| $\langle \nu_1, \gamma_2 \rangle = 11$ | $\langle \nu_2, \gamma_2 \rangle = 4$ |

Por lo tanto la serie de Poincaré es,

$$P_{(S,0)}(t_1, t_2) = \frac{1}{(1 - t_1^9 t_2^3)(1 - t_2^3)(1 - t_2)} \frac{(1 - t_1^9 t_2^3)(1 - t_1^{99} t_2^{36})}{(1 - t_1^3 t_2)(1 - t_1^{11} t_2^4)}. \quad (3.23)$$

Tras cancelar $(1 - t_1^9 t_2^3)$ en numerador y denominador obtenemos,

$$P_{(S,0)}(t_1, t_2) = \frac{1}{(1 - t_2^3)(1 - t_2)} \frac{(1 - t_1^{99} t_2^{36})}{(1 - t_1^3 t_2)(1 - t_1^{11} t_2^4)}. \quad (3.24)$$

La cual verifica que $P_{(S,0)}(t_1, t_2) = \frac{1}{(1-t_1)}P(S', 0)(t_1, t_2)$ tal y como dice la Proposición 3.5.5.

Ahora aplicamos el algoritmo descrito en la demostración del Teorema 3.5.4, obteniendo $d = 3$, $g = 1$ y $M_f^w = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Además como la única relación que se satisface es $(t_1^{11}t_2^4)^9 = t_1^{99}t_2^{36}$ se deduce que $n_1 = 9$ y por hipótesis sabemos que $s_2 = 0$. El término $1 - t_2$ aparece en el denominador con multiplicidad uno. La matriz \mathcal{M} es,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}.$$

El sistema lineal $\mathcal{M}\lambda = (11, 4)^t$ tiene una única solución que es $(\frac{11}{3}, \frac{1}{9})$ y por tanto la sucesión normalizada de exponentes característicos de $(S, 0)$ es $\lambda_1 = (\frac{11}{3}, \frac{1}{9}, 0)$.

Hemos obtenido un exponente característico distinto del original. Pero sabemos que esto no contradice el Lema 3.5.3 ya que la proyección original no esta normalizada. Luego $\lambda_1 = (\frac{11}{3}, \frac{1}{9}, 0)$ es necesariamente la normalización de los exponentes característicos $\lambda_1 = (\frac{1}{3}, 0, 0)$ y $\lambda_2 = (\frac{5}{9}, \frac{1}{9}, 0)$.

3.8. Integración con respecto a la Característica de Euler

En esta sección escribimos la serie de Poincaré como la integral con respecto de la característica de Euler a lo largo de la proyectivización del anillo de funciones de la singularidad, de una función definida por las valoraciones esenciales. Para ello nos hemos basado, cambiando sensiblemente alguna definición, en los resultados descritos en [28].

Sea $\underline{w} = (w_1, \dots, w_p)$ el conjunto de valoraciones esenciales de una singularidad de hipersuperficie casi-ordinaria irreducible $(S, 0)$. Para mantener la notación con [28] escribimos $\mathcal{O}_S = R$.

Consideramos para cada $\underline{a} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^p$ y para cada $i = 1, \dots, r$ el ideal

$$I_{w_i}(a_i) = \{g \in \mathcal{O}_S \mid w_i(g) \geq a_i\}.$$

Definición 3.8.1. *Definimos el **semigrupo extendido** como,*

$$\hat{\Gamma} = \{(\underline{w}(\phi), \phi|_{\underline{w}}) \mid \exists \underline{a} : \underline{w}(\phi) = \underline{a}, \phi \in \mathcal{O}_S, \phi \in \cap(I_{w_i}(a_i)) - \cup(I_{w_i}(a_i + 1))\},$$

donde $\phi|_{\underline{w}}$ es la restricción simbólica $\sum_{u \in \mathcal{F} \cap M} c_u \underline{X}^u$ de $\phi = \sum_u c_u \underline{X}^u$ a la cara \mathcal{F} determinada por \underline{w} .

También consideramos la proyección $\rho : \hat{\Gamma} \rightarrow \langle \underline{w}, \Gamma \rangle; (\underline{w}(\phi), \phi_{\underline{w}}) \rightarrow \underline{w}(\phi)$. Para cada $\underline{a} \in \langle \underline{w}, \Gamma \rangle$, la **fibra** $F_{\underline{a}}$ de \underline{a} esta definida como $\rho^{-1}(\underline{a}) = J(\underline{a})$, donde $J(\underline{a})$ es la componente homogénea del graduado $gr_{\underline{w}}\mathcal{O}_S$ definido en la Sección 3.3. Una primera observación interesante es,

$$\int_{\mathbb{P}\hat{\Gamma}} \underline{t}^{\underline{a}} d\chi = \sum \chi(F_{\underline{a}}) \underline{t}^{\underline{a}} = P_{(S,0)}. \quad (3.25)$$

Es natural en este contexto tomar cualquier valoración esencial centrada en el origen, digamos w_r , y considerar

$$\mathcal{J}_k := \mathcal{O}_S / I_{w_r}(k), \quad I_{w_r}(k) = \{\phi \in \mathcal{O}_S \mid w_r(\phi) \geq k\}.$$

Denotamos por $d(k) = \dim(\mathcal{J}_k)$. Para un espacio vectorial complejo L denotamos por $\mathbb{P}L := (L \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$ su proyectivización. También denotamos por \mathbb{P}^*L a la unión disjunta de $\mathbb{P}L$ con un punto $\{*\}$.

Definición 3.8.2. Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{P}\mathcal{O}_S$ es **cilíndrico** si existe, $k \geq 1$ y $B \subseteq \mathbb{P}\mathcal{J}_k \subset \mathbb{P}^*\mathcal{J}_k$ constructible, tal que $\pi_k^{-1}(B) = A$ donde:

$$\mathbb{P}\mathcal{O}_S \xrightarrow{i} \mathbb{P}^*\mathcal{O}_S \xrightarrow{n} \mathbb{P}^*\mathcal{O}_{\bar{S}} \xrightarrow{e_k} \mathbb{P}^*\mathcal{J}_k; \quad \pi_k = e_k \circ n \circ i$$

y e_k es el epimorfismo canónico y n, i son inclusiones.

Tenemos que ver que esta definición no depende de la proyección elegida. Supongamos que para $k' > k$ tenemos que $\pi_k^{-1}(B) = A = \pi_{k'}^{-1}(B')$, es suficiente ver que la restricción de la aplicación $\pi_{k',k} : \mathbb{P}^*\mathcal{J}_{k'} \rightarrow \mathbb{P}^*\mathcal{J}_k$ a $\mathbb{P}\mathcal{J}_k \subset \mathbb{P}^*\mathcal{J}_k$ es una fibración localmente trivial, ya que en dicho caso $B' = B \times \mathbb{C}^{d(k')-d(k)}$ y por lo tanto $\chi(B') = \chi(B) \cdot \chi(\mathbb{C}^{d(k')-d(k)}) = \chi(B)$ con lo que se concluirá.

La fibra de un punto $g \in \mathbb{P}\mathcal{J}_k$ para la aplicación $\pi_{k',k}$, es la misma que la dada por la aplicación $\hat{\pi}_{k',k} : \mathcal{J}_{k'} \rightarrow \mathcal{J}_k$, es fácil probar este hecho mirando en cada carta. Ahora consideramos $\hat{\pi}_{k',k}^{-1}(g) = \{h \in \mathcal{J}_{k'} \mid \hat{\pi}_{k',k}(h) = g\} = \{h \in \mathcal{O}_{\bar{S}} \mid k < w_r(h) \leq k'\} \cong \mathbb{C}^d$ donde $d = \#\{\gamma \in \Gamma \mid k < \langle w_r, \gamma \rangle \leq k'\}$.

Definición 3.8.3. Para todo conjunto cilíndrico $A \subseteq \mathbb{P}\mathcal{O}_S$, con $A = \pi_k^{-1}(B)$, su característica de Euler esta definida como $\chi(A) = \chi(B)$.

Definición 3.8.4. Decimos que una función ψ es **cilíndrica** si, para cada $0 \neq \underline{a} \in \mathbb{Z}^r$, el conjunto $\psi^{-1}(\underline{a}) \subset \mathbb{P}\mathcal{O}_S$ es cilíndrico.

Definición 3.8.5. Sea G un grupo. La integral de una función cilíndrica ψ sobre el espacio $\mathbb{P}\mathcal{O}_S$ con respecto a la característica de Euler es,

$$\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}_S} \underline{t}^{\underline{w}} d\chi = \sum_{\underline{a} \in G, \underline{a} \neq 0} \chi(\psi^{-1}(\underline{a})) \cdot \underline{a}.$$

Consideramos $\psi = \underline{t}^w$, la cual es una función cilíndrica, por lo tanto sabemos que:

$$\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}_S} \underline{t}^w d\chi = \sum_{\substack{\underline{a} \in \langle \underline{w}, \Gamma \rangle \\ \underline{a} \neq 0}} \chi(\psi^{-1}(\underline{a})) \underline{t}^{\underline{a}}.$$

Se puede comprobar fácilmente que,

$$\psi^{-1}(\underline{a}) = \cap(I_{w_i}(a_i)) - \cup(I_{w_i}(a_i + 1)).$$

Este conjunto es cilíndrico, es suficiente tomar $k = a_r$ y $B = J(\underline{a}) \subseteq \mathcal{J}_k$. Entonces,

$$\chi(\psi^{-1}(\underline{a})) = \psi(B) = \dim B = \#\{\gamma \in \Gamma \mid \langle \underline{w}, \gamma \rangle = \underline{a}\}.$$

Luego se tiene trivialmente el siguiente resultado,

Proposición 3.8.6.

$$P_{(S,0)} = \int_{\mathbb{P}\mathcal{O}_S} \underline{t}^w d\chi.$$

Bibliografía

- [1] A'Campo N.; *La fonction zeta d' une monodromie*; Comment. Math. Helv. v. 50,233-248, 1975.
- [2] Abhyankar S.S.; *On the ramification of algebraic functions*; Amer. J. Math., 77. (1955), 575-592.
- [3] Alonso, M. E.; Luengo, I.; Raimondo, M.; *An algorithm on quasi-ordinary polynomials*. Applied algebra, algebraic algorithms and error-correcting codes (Rome, 1988), 59–73, Lecture Notes in Comput. Sci., 357, Springer, Berlin, 1989.
- [4] Arnold V.I., Gusein-Zade S.M., Varchenko A.N.; *Singularities of Differentiable Maps*; Vol II. Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1988.
- [5] Artal Bartolo E., Cassou-Noguès P., Luengo I., Melle Hernández A., *Quasi-ordinary power series and their zeta functions*; Duke Mem. Amer. Math. Soc. 178 (2005), no. 841, vi+85 pp.
- [6] Atiyah-Mac.Donald; *Introduction to commutative algebra*; Addison-Wesley, Publis. Co. London 1969.
- [7] Ban C.; *A Whitney stratification and equisingular family of quasi-ordinary singularities*; Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), no. 2, 305–311.
- [8] Bouvier, C.; *Diviseurs essentiels, composantes essentielles des variétés toriques singulières*; Duke Math. J. 91 (1998), no. 3, 609–620.
- [9] Bouvier, C.; Gonzalez-Sprinberg, G.; *Système générateur minimal, diviseurs essentiels et G -désingularisations de variétés toriques*; Tohoku Math. J. (2) 47 (1995), no. 1, 125–149.
- [10] Brieskorn E., Knörrer H.; *Plane curves*; Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, April 1986.

- [11] W. Bruns, R. Koch; *NORMALIZ, computing normalizations of affine semigroups*; Available via anonymous ftp from ftp.math.uos.de/pub/osm/kommalg/software/.
- [12] W. Bruns, R. Koch; *Computing the integral closure of an affine semigroup*; Univ. Jagell. Acta Math. 39, 59 - 70 (2001).
- [13] W. Bruns, J. Gubeladze; *Normality and covering properties of affine semigroups*; J. Reine Angew. Math. 510, 161 - 178 (1999).
- [14] W. Bruns, J. Gubeladze; *Semigroup algebras and discrete geometry*; In L. Bonavero and M. Brion (eds.), *Toric geometry. Seminaires et Congres* 6, 43 - 127 (2002).
- [15] W. Bruns and J. Gubeladze; *Polytopes, Rings, and K-Theory*; Book in progress, version of February 18, 2006.
- [16] W. Bruns, J. Gubeladze, N. V. Trung; *Problems and algorithms for affine semigroups*; Semigroup Forum 64, 180–212 (2002).
- [17] Campillo A.; *Algebroid curves in positive characteristic*; L.N.M vol. 813. Springer-Verlag. Berlin and New York 1980.
- [18] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *On the monodromy of a plane curve singularity and the Poincaré series of its rings of functions*; Functional Analysis and its Applications, v.33, N 1, 56-57, 1999 .
- [19] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *On Generators of the semigroup of a plane curve singularity*; J.London Math.Soc.(2) 60 (1999) 420-430.
- [20] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *The Alexander polynomial of a plane curve singularity and the ring of functions on it* ; Russian Math.Surveys, v.54, N 3, 157-158, 1999 .
- [21] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *Integration with respect to the Euler characteristic over a function space, and the Alexander polynomial of a plane curve singularity*;(Russian) Uspekhi Mat. Nauk 55 (2000), no. 6(336), 127–128; translation in Russian Math. Surveys 55 (2000), no. 6, 1148–1149.
- [22] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *Integrals with respect to the Euler characteristic over spaces of functions, and the Alexander polynomial*; (Russian) Tr. Mat. Inst. Steklova 238 (2002), Monodromiya v Zada-

-
- chakh *Algebr. Geom. i Differ. Uravn.*, 144–157; translation in *Proc. Steklov Inst. Math.* 2002, no. 3 (238), 134–147.
- [23] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *The Alexander polynomial of a plane curve singularity and integrals with respect to the Euler characteristic*; *Internat. J. Math.* 14 (2003), no. 1, 47–54.
- [24] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *The Alexander polynomial of a plane curve singularity via the ring of functions on it*; *Duke Math. J.* 117 (2003), no. 1, 125–156.
- [25] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *Poincaré series of a rational surface singularity*; *Invent. Math.* 155 (2004), no. 1, 41–53.
- [26] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *On the zeta functions of a meromorphic germ in two variables*; *Geometry, topology and mathematical physics*, 67–74, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, 212, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [27] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *Poincaré series of curves on rational surface singularities*; *Comment. Math. Helv.* 80 (2005), no. 1, 95–102.
- [28] Campillo A., Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *Multi-index Filtrations and Generalized Poincaré Series*; *Monatsh. Math.* 150, 193–209 (2007).
- [29] Casas Alvero E.; *Singularities of Plane Curves*; Cambridge University Press, 2000.
- [30] Cutkosky S.D.; Herzog J.; Reguera A.; *Poincaré series of resolutions of surface singularities*; *Trans. Amer. Math. Soc.* 356 (2004), no. 5, 1833–1874.
- [31] Delgado F.; *Invariantes Numéricos de las Curvas Algebroides Reducidas. Una descripción explícita*; Tesis doctoral, Universidad de Valladolid. Junio 6, 1986.
- [32] Delgado F.; *The semigroup of values of a curve singularity with several branches*; *Manuscripta Math.* v.59, 347–374, 1987.
- [33] Delgado F.; *An Arithmetical factorization for the critical point set of some maps from \mathbb{C}^2 to \mathbb{C}^2* ; In: *Singularities-Lille 1991*. Jean-Paul Brasselet Ed. London Mathematical Society Lecture Note Series, v.201. Cambridge University Press, 61–100, 1994.

- [34] Delgado F., Galindo C., Nuñez A.; *Generating sequences and Poincaré series for a finite set of plane divisorial valuations*; Math. Subject Clas. 14B05, 16W50, 16W70, 13A18.
- [35] Delgado F., Gusein-Zade S.M.; *Poincaré series for several plane divisorial valuations*; Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 46 (2003), no. 2, 501–509.
- [36] Delgado F., Hernando F.; *On the contact with the polar*; Computational commutative and non-commutative algebraic geometry, 74–78, NATO Sci. Ser. III Comput. Syst. Sci., 196, IOS, Amsterdam, 2005. 14H20.
- [37] De Jong T., Pfister G.; *Local Analytic Geometry*; Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 2000.
- [38] Ebeling W., Gusein-Zade S.M.; *A filtration defined by arcs on a variety*; RUSS MATH SURV, 2006, 61 (2), 353-355.
- [39] Ebeling W., Gusein-Zade S.M.; *Monodromies and Poincaré series of quasihomogeneous complete intersections*; Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 74 (2004), 175–179.
- [40] Ebeling W., Gusein-Zade S.M.; *Poincaré series and zeta function of the monodromy of a quasihomogeneous singularity*; Math. Res. Lett. 9 (2002), no. 4, 509–513.
- [41] Eisenbud D., Neumann W.; *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*; Ann. of Math. Studies 110, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1985.
- [42] Ewald Günter; *Combinatorial convexity and algebraic geometry*; Graduate Texts in Mathematics, 168. Springer-Verlag, New York, 1996. xiv+372 pp.
- [43] Fulton W.; *Introduction to Toric Varieties*; Annals of Math. Studies (131), Princeton University Press, 1993.
- [44] Galindo C.; *On Poincaré series for a plane divisorial valuation*; Bull. Belg. Math. Soc. 2 (1995), 65-74.
- [45] García Barroso E.R.; González-Pérez P.D.; *Decomposition in bunches of the critical locus of a quasi-ordinary map*; Compos. Math. 141 (2005), no. 2, 461–486.
- [46] Gau Y.-N.; *Topology of the quasi-ordinary surface singularities*; Topology 25, 495-519 (1986).

-
- [47] Gau Y.-N.; *Embedded topological classification of quasi-ordinary singularities*; Mem. Amer. Math. Soc., vol 388 (1988).
- [48] González Pérez P.D.; *Quasi-ordinary singularities via toric geometry*; Tesis doctoral, Universidad de La Laguna 2000 .
- [49] González Pérez P.D., González-Springberg G.; *Analytical invariants of quasi-ordinary Hypersurface singularities associated to divisorial valuations*; Kodai Math. J. 27 (2004), no. 2, 164–173.
- [50] González Pérez P.D., Hernando Carrillo F.; *Quasi-ordinary singularities: essential divisors and Poincaré series*; Preprint, 2007.
- [51] González Pérez P.D., McEwan L.J., Némethi A.; *The zeta-function of a quasi-ordinary singularity. II*; Topics in algebraic and noncommutative geometry (Luminy/Annapolis, MD, 2001), 109–122, Contemp. Math., 324, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [52] González Pérez P.D.; *The Semigroup of a Quasi-Ordinary Hypersurface*; J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), no. 3, 383–399.
- [53] González Pérez P.D.; *Toric embedded resolutions of quasi-ordinary hypersurface singularities*; Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 53 (2003), no. 6, 1819–1881.
- [54] González Pérez P.D.; *The Nash problem for quasi-ordinary singularities*; preprint 2006.
- [55] González Pérez P.D., Bernard T.; *Embedded resolutions of non necessarily normal affine toric varieties*; C. R. Math. Acad. Sci. Paris 334 (2002), no. 5, 379–382.
- [56] González-Springberg G., Lejeune-Jalabert M.; *Modèles canoniques plongés*; I.Kodai Math. J. 14 (1991), no. 2, 194-209.
- [57] Guzbeladze J.; *The isomorphism problem for commutative monoids rings*; Journal of Pure and Applied Algebra, 129.(1998), 35-65.
- [58] Greuel G.M., Lossen C., Shutin E.; *Singular algebraic curves*; Springer-Verlag, November 29, 2001 (preprint).
- [59] Greuel G.M., Pfister G., Schönemann H. ; *The Computer Algebra System SINGULAR*; <http://www.singular.uni-kl.de/>.

- [60] Greuel G.M., Pfister G.; *A Singular Introduction to Commutative Algebra*; Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2002.
- [61] Gusein-Zade S.M., Delgado F., Campillo A.; *The Extended Semigroup of a Plane curve singularity*; Steklov Institute of Mathematics, Vol. 221, 1998, pp. 139-159.
- [62] Hardy, G.H., Wright E.M.; *An introduction to the theory of numbers*; Fifth edition. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.
- [63] Ishii Shihoko; *The Local Nash problem on arc families of singularities*; Annales de l'institut Fourier, 56 no. 4 (2006), p. 1207-1224.
- [64] Ishii Shihoko; *Arcs, valuations and the Nash map*; J. Reine Angew. Math. 588 (2005), 71–92.
- [65] Ishii Shihoko; *The arc space of a toric variety*; J. Algebra 278 (2004), no. 2, 666–683.
- [66] Ishii Shihoko, Kollár János; *The Nash problem on arc families of singularities*; Duke Math. J. 120 (2003).
- [67] Jung H.W.E.; *Darstellung der Funktionen eines algebraischen körpres zweier unabhängigen veränderlichen x, y in der Umgebung einer stelle $x = a, y = b$* ; J.Reine Angew. Math., 133 (1908), 289-314.
- [68] Khinchin A.Ya.; *Continued fractions*; With a preface by B. V. Gnedenko. Translated from the third (1961) Russian edition. Reprint of the 1964 translation. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1997. xii+95 pp. ISBN: 0-486-69630-8.
- [69] Kiyek K., Micus M.; *Semigroup of a quasiordinary singularity*; Topics in Algebra, Banach Center Publications, volume 26, part 2, pwn-polish scientific publishers, Warsaw 1990.
- [70] Kiyek K., Vicente J.L.; *Resolution of curve and surface singularities. In characteristic zero. Algebras and Applications, 4*; Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. xxii+483 pp. ISBN: 1-4020-2028-7.
- [71] Lamm M.; *Hamburger-Noether-Entwicklung von Kurvensingularitäten*; Universität Kaiserslautern, August 1999.
- [72] Lemahieu A.; *The Poincaré Series of a toric variety*; Preprint Katholieke Universiteit Leuven, August 2006.

-
- [73] Lipman J.; *Quasi-ordinary singularities of embeded surfaces*; Thesis, Harvard University (1965).
- [74] Lipman J.; *Introduction to resolution of singularities*; Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974), pp. 187–230. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975.
- [75] Lipman J.; *Quasi-ordinary singularities of surfaces in C^3* ; Proc. Sympos. Pure Math., 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [76] Lipman J.; *Topological invariants of quasi-ordinary singularities*; Mem. Amer. Math. Soc. 74 (1988), no. 388, 1–107.
- [77] Luengo Ignacio.; *On the structure of embedded algebroid surfaces*; Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), 185–192, Proc. Sympos. Pure Math., 40, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983.
- [78] McEwan Lee J., Némethi A.; *Some conjectures about quasi-ordinary singularities*; Topics in algebraic and noncommutative geometry (Luminy/Annapolis, MD, 2001), 185–193, Contemp. Math., 324, Amer. Math.Soc., Providence, RI, 2003.
- [79] McEwan Lee J., Némethi A.; *The zeta function of a quasi-ordinary singularity*; Compos. Math. 140 (2004), no. 3, 667–682.
- [80] Micus M.; *Zur formalen Äquivalentz von quasigewöhnlichen Singularitäten*; Thesis, Padeborn, 1987.
- [81] Oda T.; *Convex Bodies and algebraic geometry*; Annals of Math. Studies(131), Springer-Verlag, 1988.
- [82] Oh Kyungho; *Topological types of quasi-ordinary singularities*; Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), no. 1, 53–59.
- [83] Oh Kyungho; *The branching orders of a quasi-ordinary projection*; Math. Z. 220 (1995), no. 2, 307–315.
- [84] Perez Hernandez A.; *Semigrupos de de curvas* ; Universidad de Valladolid , Noviembre 18 ,1998 .
- [85] Popescu-Pampu P.; *Arbres de contact des Singularités Quasi-Ordinaires et Graphes D'Adjacence pour les 3-Variétés Réelles*; Thèse de Doctorat.
- [86] Popescu-Pampu P.; *Two dimensional iterated torus knots and quasi-ordinary surface singularities*; C. R. Math. Acad. Sci. Paris 336 (2003), no. 8, 651–656.

- [87] Popescu-Pampu P.; *Sur le contact d'une hypersurface quasi-ordinaire avec ses hypersurfaces polaires*; J. Inst. Math. Jussieu 3 (2004), no. 1, 105–138.
- [88] Popescu-Pampu P.; *On the analytical invariance of the semigroups of a quasi-ordinary hypersurface singularity*; Duke Math. J. 124 (2004), no. 1, 67–104.
- [89] Popescu-Pampu P.; *On Higher dimensional Hirzebruch-Jung singularities*; Rev. Mat. Complut. 18 (2005), no. 1, 209–232.
- [90] Stanley R.P.; *Combinatorics and commutative algebra*; Second edition. Progress in Mathematics, 41. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1996. x+164 pp. ISBN: 0-8176-3836-9.
- [91] Schroeder M.R.; *Number theory in science and communication. With applications in cryptography, physics, digital information, computing, and self-similarity*; Fourth edition. Springer Series in Information Sciences, 7. Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [92] Spivakovky M.; *Valuations in function fields of surfaces*; Armer. J. Math 112(1990), 107-156.
- [93] Waldi R.; *Wertehalbgruppe und Singularität einer ebenen algebraischen Kurve*; Dissertation. Regensburg, 1972.
- [94] Walker R.J.; *Algebraic Curves*; Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.
- [95] Yamamoto M.; *Classification of isolated algebraic singularities by their Alexander polynomials*; Topology, v.23, N 3,277-287, 1984.
- [96] Teissier B.; *The monomial curve and its deformations*; Appendix in [101].
- [97] Zariski O.; *On the topology of algebroid singularities*; Am. J. Math. 54, 433-465, 1932.
- [98] Zariski O.; *Exceptional singularities of an algebroid surface and their reduction*; Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 43 1967 135–146.
- [99] Zariski O.; *Studies in Equisingularity*; (I) Am. J.Math. 87, 507-535, 1965. (II) Am. J.Math. 87, 972-1006, 1965. (III) Am. J.Math. 90, 961-1023, 1968.

- [100] Zariski O.; *Contribution to the problem of equisingularity*; C.I.M.E. Varena. September 1969.
- [101] Zariski O.; *Le Problème des modules pour les branches planes*; Hermann, Paris, 1986.
- [102] Zariski O., Samuel P.; *Commutative algebra*; 2 vol. Springer-Verlag 1975, 1976.

Índice alfabético

- Abanico, 116
- Algoritmo Newton Generalizado, 64
- Arco muerto, 106

- Buenas Coordenadas, 62

- Centro de un divisor, 124
- Comparables, 73, 80
- Conductor, 79, 90
- Conjunto cilíndrico, 147
- Cono, 116
- Coordenadas bien ordenadas, 62
- Curveta, 93

- Discriminate, 57
- Divisor Esencial, 125
- dual, 116

- Estrictamente comparables, 72, 80
- Exponente Dominante, 71
- Exponentes Característicos, 61

- Fibra, 147
- Fibra infinita, 88
- Función cilíndrica, 147
- Función Zeta, 144

- Interior relativo, 116

- Matriz esencial, 135
- Monomio Característicos, 61

- n-sucesión, 63

- Orden, 71
- Orden de Coincidencia, 60, 73

- Ortogonal, 116
- Poliedro de Newton, 72
- Polinomio de Weierstrass C-O, 58

- Racionalmente comparables, 73, 80
- Rama casi-ordinaria, 59
- Rama Normalizada, 62
- Resolución, 125
- Resultante, 58

- Saturación, 78
- Saturado, 78
- Semi Raíz, 75
- Semigrupo, 70, 81, 86
- Semigrupo extendido, 146
- Serie de Poincaré, 114, 118, 122, 125, 130, 137
- Singularidad casi-ordinaria, 58
- Soporte, 72
- Subdivisión, 116
- Sucesión de Divisores, 63
- Suma de Farey, 95

- Tipo dimensional, 138
- Truncación, 84

